Heurísticas y Principios para Resolver Problemas de Concursos de Matemáticas

13. Colorear

José Antonio Gómez Ortega
Universidad Nacional Autónoma de México

José Heber Nieto Said
Universidad del Zulia (Venezuela)

Capítulo 13

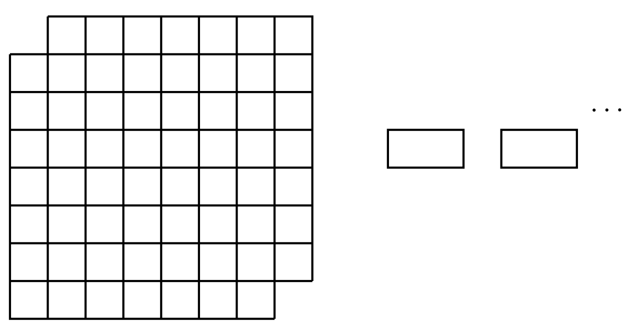
Colorear

13.1. Introducción

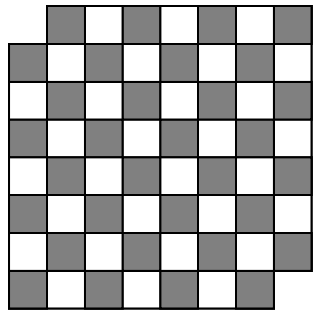
La estrategia de *colorear* consiste en asociar un color a cada elemento de un conjunto. Puede parecer extraño que se hable del color de objetos matemáticos abstractos, como los números, pero esto no es más que una forma de hablar, que corresponde al concepto matemático de *partición* de un conjunto en subconjuntos disjuntos. Cada bloque de la partición agrupa a los elementos "pintados de un mismo color". Sin embargo hablar de colores es más sugestivo y propicia una visualización de los problemas que muchas veces contribuye a solucionarlos.

13.2. Ejemplos

Ejemplo 13.1. A una cuadrícula de 8×8 cuadritos se le retiran dos cuadritos de esquinas opuestas. ¿Puede la cuadrícula ser cubierta con 31 dominós (fichas de 2×1 cuadritos)?

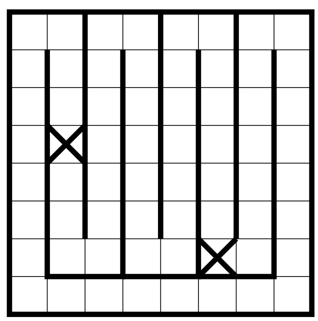


Solución. La respuesta es **no**. Un artificio para resolverlo es pensar a la cuadrícula coloreada como un tablero de ajedrez, esto es, los cuadritos coloreados en forma alternada con dos colores: blanco y negro. En el tablero completo (con 64 cuadritos), quedan coloreados 32 cuadritos de color blanco y los otros 32 de color negro. Al retirar dos esquinas opuestas, se están retirando dos cuadritos de un mismo color (en nuestro caso blancos), quedando 32 de color negro y 30 de color blanco.



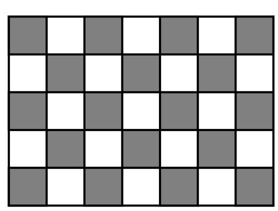
Por otro lado, un dominó cubre dos cuadritos: uno de cada color. Las 31 fichas de dominó que se tienen, solamente pueden cubrir 31 cuadritos de color negro, por lo que siempre faltará por cubrir un cuadrito de dicho color. Esto muestra que es imposible cubrir la cuadrícula como se pide.

¿Pero qué sucede si al tablero de ajedrez se le recortan dos cuadritos de diferente color? ¿Se podrá cubrir el tablero así recortado con 31 piezas de dominó?
En este caso la respuesta es que si, basta hacer un camino cerrado que recorra todos los cuadritos una vez y solamente una vez, como en la figura siguiente, y ver que siguiendo el camino podemos ir acomodando las piezas de dominós.



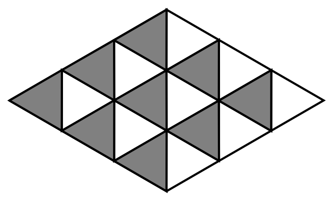
Ejemplo 13.2. En un salón de clase están sentados los alumnos formando un arreglo rectangular de 5×7. La maestra que quiere hacer una dinámica, les pide a todos los alumnos que intercambien de lugar con un compañero vecino, moviéndose un lugar ya sea a la izquierda, a la derecha, adelante o atrás de su lugar. Pepito, que sabe de matemáticas, le dice a la maestra que esto es imposible ¿Tiene razón Pepito?

Solución. Sí, tiene razón. Una manera de convencerse es tomar una cuadrícula de 5×7, pensando que las casillas representan los lugares donde están los alumnos. Al colorear las casillas de blanco y negro como un tablero de ajedrez como se muestra en el dibujo,



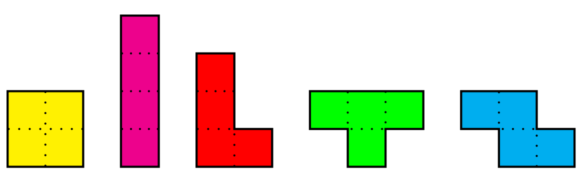
observamos lo siguiente: cuando un alumno se cambie de lugar, ocupará un lugar de color diferente al que ocupaba. El que se encuentre en un lugar de color blanco pasará a uno de color negro y viceversa. Pero sucede que el tablero así coloreado, tiene 18 casillas de color negro y 17 de color blanco, por lo que los alumnos que están en casillas de color negro no podrán pasar todos a las casillas blancas.

Ejemplo 13.3. (OMA Selectivo 2010) Ariel y Berta juegan en un tablero con forma de rombo de lado n y ángulos de $60°$ y $120°$, dividido en $2n^2$ triangulitos equiláteros mediante paralelas a los lados y paralelas a la diagonal menor del rombo. Ariel usa una ficha roja y Berta una ficha azul que inicialmente están una en cada una de las casillas de las esquinas donde el tablero forma ángulos de $60°$. Los jugadores mueven por turnos sus fichas a una casilla vecina (con un lado común). Un jugador gana si logra comer la ficha del otro cayendo en la casilla en la que está la ficha de su oponente, o si llega a la casilla opuesta a la de su salida antes que su rival haga lo propio. Si Ariel hace la primera jugada, determine si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora.



Solución. Coloreamos de blanco y negro las casillas del tablero, de manera que dos casillas con lado en comun tengan distinto color. Como las casillas de inicio son de distinto color, cuando le toque jugar a Berta siempre moverá su ficha a una casilla de distinto color a la de Ariel, y por lo tanto nunca va a poder comer su ficha. Luego Ariel gana siempre, ya que comienza antes y como Berta no puede comer su ficha, dirigiéndose por el camino mas corto a la casilla opuesta llegará antes que su rival.

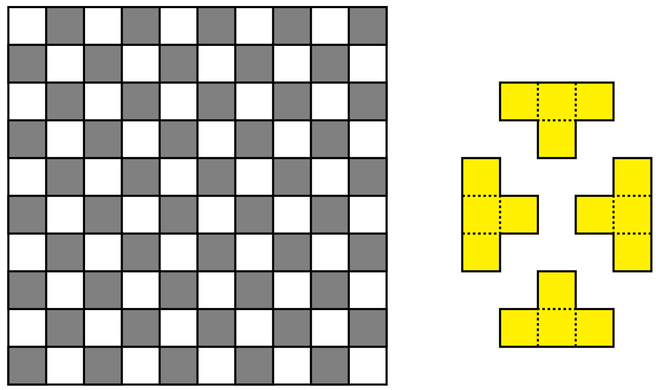
Un *tetraminó* es una figura plana compuesta por cuatro cuadrados unitarios. Hay cinco tipos de tetraminós (a menos de congruencias) que se muestran en la figura siguiente. De izquierda a derecha se llaman cuadrado, I, L, T y Z.



Observe que los tetraminós L y Z tienen versiones reflejadas, que no son directamente congruentes con ellos.

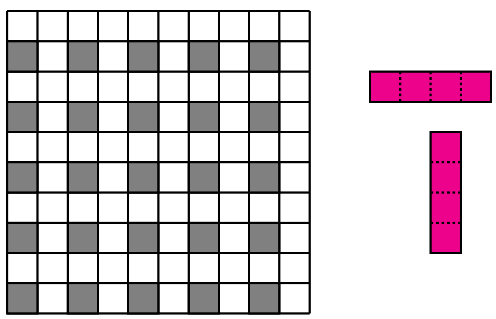
Ejemplo 13.4. (8ª OMM/6) (a) ¿Se puede llenar un tablero de 10×10 cuadritos con 25 tetraminós I?
(b) ¿Se puede llenar un tablero de 10×10 cuadritos con 25 tetraminós T?
(c) ¿Se puede llenar un tablero de 10×10 cuadritos con 25 tetraminós L?

Solución. La respuesta en cada caso es *no*. Veamos primero el caso (b). Coloreamos el tablero con dos colores como tablero de damas.

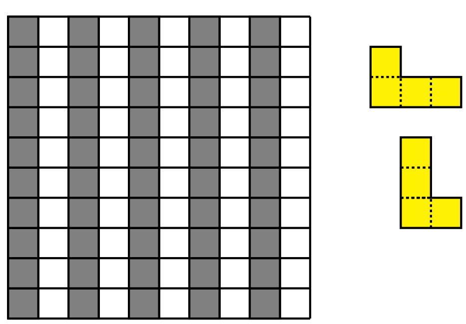


Ahora notemos que cada tetraminó T cubre 1 ó 3 cuadritos negros. El número de cuadritos negros cubiertos por 25 piezas será entonces la suma de 25 números impares, que es impar. Pero el tablero tiene 50 cuadritos negros, luego es imposible cubrirlo como se pregunta.

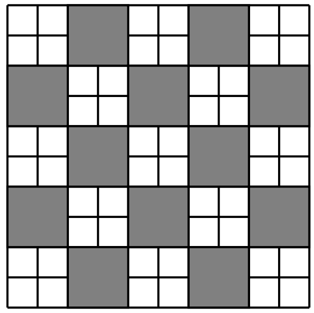
Ahora veamos el caso (a) La clave está en colorear el tablero de la siguiente forma:



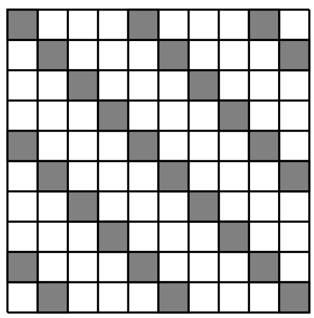
Cada ficha cubre 0 ó 2 cuadritos negros, luego las fichas (las 25) cubren un número par de cuadritos negros, pero necesitamos cubrir 25. Luego no es posible cubrir el tablero como se pide. Ahora veamos el caso (c). Considere la siguiente coloración del tablero; cada tetrominó L, no inporta cómo se coloque, cubre 1 ó 3 cuadritos negros. Ahora proceda como en el caso de las fichas en forma de T.



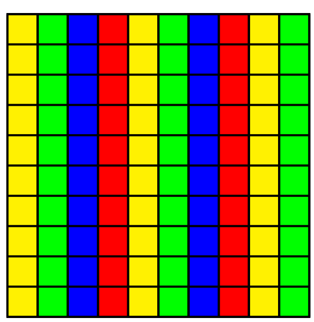
Regresemos al problema de llenar un tablero de 10×10 con tetraminós I. Ya sabemos que no se puede, pero veámoslo de otras maneras.
Una segunda forma es considerar la coloración siguiente.



En esta coloración el número de cuadritos negros es menor al de cuadritos blancos y un tetraminó I cubre dos de cada color, luego nunca podrá cubrirse el tablero como se pide.
Una tercera forma es con la siguiente coloración:



Cada tetrominó I solamente puede cubrir un cuadro sombreado, por lo que serían necesarias 26 de tales piezas y solamente se dispone de 25.
Veamos una cuarta forma, coloreando las columnas con 4 colores en forma cíclica.



Note que cada tetrominó I cubre 4 cuadritos de un mismo color o cuatro cuadritos de diferentes colores. Sea c_i (para $i = 1, 2, 3, 4$) el número de cuadritos de color i que han sido cubiertos. Inicialmente $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Después de colocar una ficha, los cuatro c_i aumentan en 1 ó uno solo de ellos aumenta en 4. Por lo tanto la igualdad $c_1 = c_2 = c_3 = c_4$ se mantiene si la consideramos módulo 4. Si se llegase a cubrir todo el tablero con las 25 piezas entonces finalizaríamos con $c_1 = c_2 = 30$ y $c_3 = c_4 = 20$, pero como $30 \not\equiv 20 \pmod 4$, tal cosa es imposible.

La idea anterior nos sirve para mostrar que:

Ejemplo 13.5. Un tablero de $m \times n$ cuadritos se puede cubrir con rectángulos de $1 \times k$ cuadritos si y solamente si k divide a uno de los enteros m ó n.

Solución. Si k divide a uno de los enteros m o n es fácil ver que se puede cubrir el tablero. Recíprocamente, suponiendo que el tablero está cubierto con rectángulos de $1 \times k$, coloreamos las columnas con k colores $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ y llamamos C_i a la cantidad de cuadritos del tablero que se colorean con el color c_i. Como cada rectángulo de $1 \times k$ cubre o bien k cuadritos de un color o bien k cuadritos de colores diferentes, sucede que:

$$C_1 \equiv C_2 \equiv \cdots \equiv C_k \pmod k$$

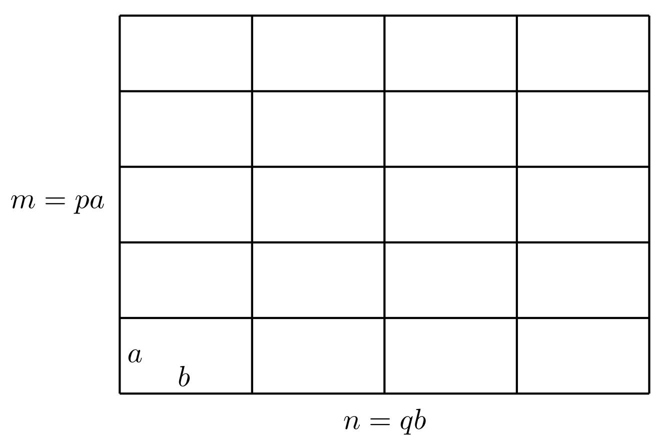
Si k no divide a n, hay una columna más de color c_1 que del color c_k y entonces $C_1 - C_k = m$, por lo que si k no divide a m entonces es falso que $C_1 \equiv C_k$ $(mod\ k)$.

Otros resultados generales para decidir cuando un tablero se puede cubrir con las otras fichas tetraminós, se tratan en los problemas 8 y 9.

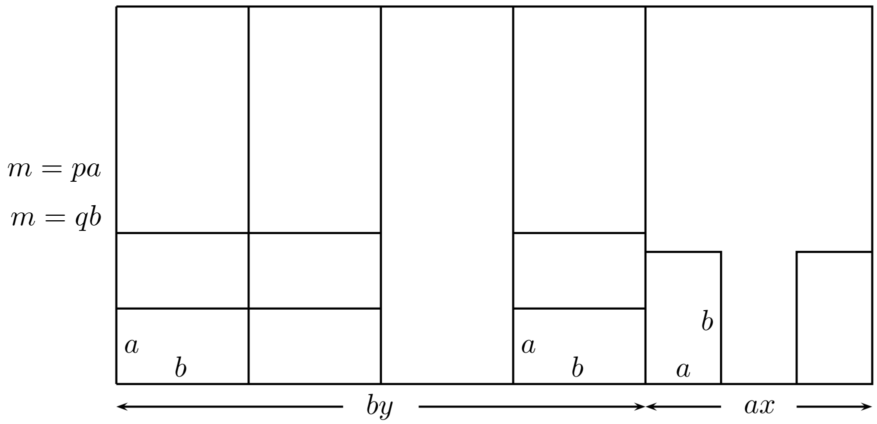
Hay un resultado general sobre el llenado de un rectángulo con rectángulos más pequeños e iguales y es el siguiente:

Teorema (N. G. de Bruijn, 1969)**.** *Un tablero de $m \times n$ cuadritos se puede cubrir con rectángulos de $a \times b$ cuadritos si y solamente si se tiene que (1) cada uno de a y b divide a uno de m y n, cada uno a uno diferente, o bien (2) ambos a y b dividen a uno de m y n, digamos que dividen a m, y el otro entero n es de la forma $n = ax + by$ para algunos enteros positivos x, y.*

Para la demostración vea las referencias al final del capítulo. El caso I corresponde a la manera más natural de llenar un tablero con rectángulos de $a \times b$:



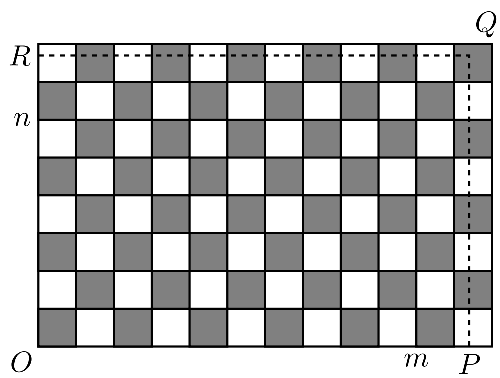
La siguiente figura da una idea del Caso 2:



El siguiente resultado es sobre una división de un rectángulo con rectángulos más pequeños no necesariamente iguales.

Ejemplo 13.6. Si un rectángulo está dividido en rectángulos, cada uno de los cuales tiene un lado de longitud entera, entonces el rectángulo que se dividió tiene al menos un lado de longitud entera.

Solución. Sea $OPQR$ el rectángulo y coloquémoslo en un plano cartesiano, con O en el origen y lados paralelos a los ejes. Dividamos el plano en cuadritos de tamaño $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, coloreados como tablero de ajedrez.

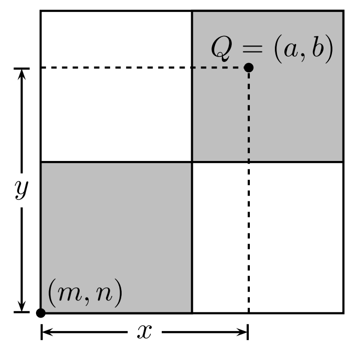


Es fácil ver que si un rectángulo tiene un lado de longitud entera y sus lados paralelos a los ejes, el rectángulo queda dividido por la cuadrícula de manera que el área negra es igual al área blanca.

Ahora al dividir el rectángulo $OPQR$ en rectangulitos cada uno de los cuales tiene un lado de longitud entera, se tiene que los rectangulitos tienen su área dividida en la mitad negra y la mitad blanca. Luego, al sumar, el rectángulo $OPQR$ también tiene la mitad de su área negra y la otra mitad blanca.

Sean $P = (a, 0)$, $Q = (a, b)$, $R = (0, b)$. Si el rectángulo $OPQR$ no tiene lados de longitud entera, sean m y n las partes enteras de a y b, respectivamente. El rectángulo de vértices O, P, (a, n)

y $(0, n)$, por tener un lado entero. queda dividido por la cuadrícula en regiones negra y blanca de igual área, y lo mismo ocurre con el rectángulo de vértices $(0, n)$, (m, n), (m, b) y R. Como $OPQR$ tiene también esa propiedad, al restar resulta que el rectángulo de vértices (m, n), (a, n), Q y (m, b) tiene la misma propiedad. Pero esto no es posible. En efecto, pongamos $x = a - m$ y $y = b - n$. Es evidente que si $x \leq 1/2$ ó $y \leq 1/2$ entonces el área negra supera a la blanca. Y si $x > 1/2$, $y > 1/2$, entonces el área negra es



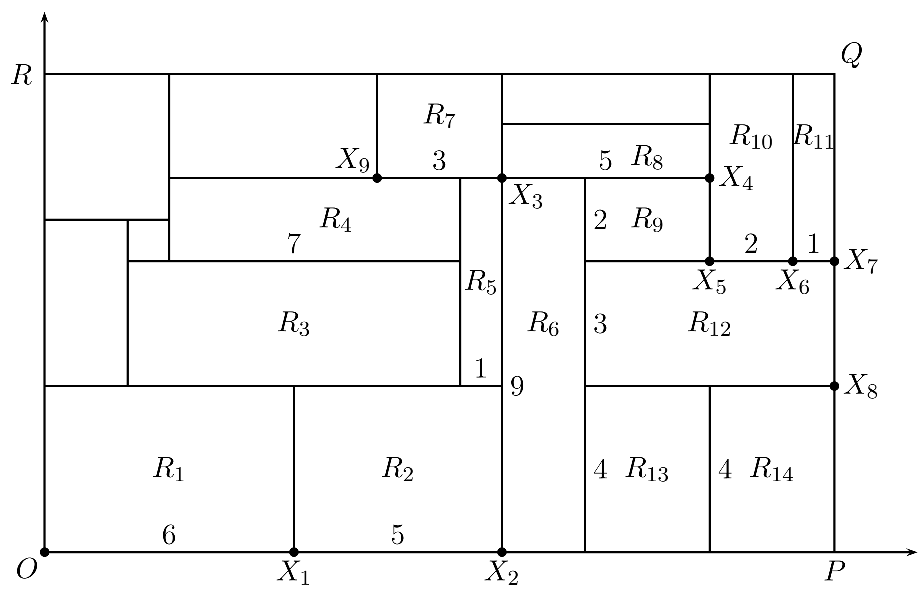
$$\frac{1}{4} + (x - \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2}) = xy - \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2},$$

el área blanca es

$$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(y - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(x + y) - \frac{1}{2}$$

y la diferencia entre ambas es $xy - x - y + 1 = (1 - x)(1 - y) > 0$.

Segunda solución. Sea $OPQR$ el rectángulo, coloquemos éste en un plano cartesiano de manera que dos de sus lados queden sobre los ejes del plano y el vértice O sobre el origen. Para tener indicios de que el resultado es cierto veamos el siguiente ejemplo:



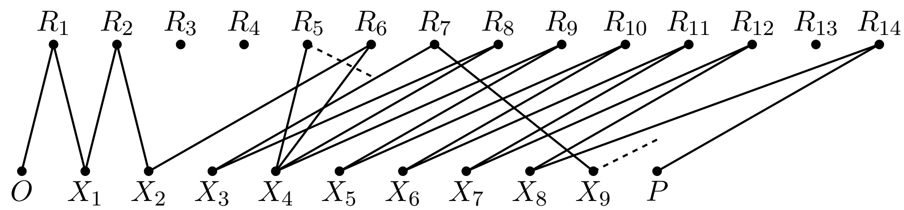
Como $X_1 = (6, 0)$, $X_2 = (11, 0)$, $X_3 = (11, 9)$, $X_4 = (16, 9)$, $X_5 = (16, 7)$, $X_6 = (18, 7)$, $X_7 = (19, 7)$ y $P = (19, 0)$, el lado OP tiene longitud entera. Si la colección de puntos reticulares (es decir, con ambas coordenadas enteras) que son esquinas de teselas (los rectangulitos en que se ha dividido $OPQR$) contiene a alguno de los puntos P, Q ó R, entonces el rectángulo $OPQR$ tiene un lado de longitud entera.

Ahora usaremos hechos elementales de la *teoría de gráficas* para la demostración.

Formemos una gráfica con vértices de dos tipos: (1) las teselas en que se ha dividido $OPQR$, que forman el conjunto $R = \{R_1, R_2, \ldots\}$ y (2) las esquinas de los rectángulos pequeños que sean puntos reticulares, que forman el conjunto $X = \{O, X_1, X_2, \ldots\}$.

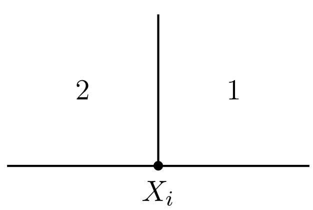
Las *aristas* se definen así: Un vértice $v \in R$ se une a un vertice $u \in X$ si u es esquina de v. Cada arista tiene un extremo en R y otro en X (es decir, el grafo es *bipartito*).

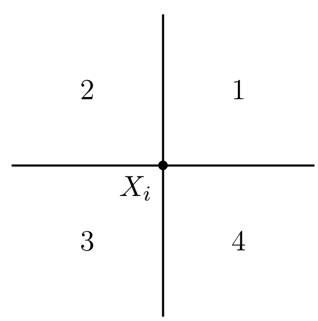
En nuestro ejemplo la gráfica es:



El número de aristas es igual a la suma de los grados de los vértices en R, que es igual a la suma de los grados de los vértices en X (el *grado* de un vértice es el número de aristas que lo tienen como extremo).

Algo clave para la solución es que el número de vértices (esquinas) de una tesela que son puntos reticulares no puede ser 1 ni 3. En efecto, si el rectángulo $ABCD$ tiene uno de sus vértices de coordenadas enteras, digamos el A, como tiene un lado de longitud entera, o B o D deberán tener ambas coordenadas enteras. Y si 3 esquinas tienen ambas coordenadas enteras, es obvio que la cuarta también las tendrá. Entonces, como cada rectangulito de la teselación contribuye a la suma de aristas con 0, 2 ó 4 aristas, debe haber un número par de aristas.
Los grados de los vértices en X se pueden contar así: el origen O tiene grado 1 y cada vértice X_i que no sea esquina del rectángulo grande contribuye con 2 ó 4 aristas. Como la suma de los grados de los vértices en X debe ser par, tiene que haber al menos otro sumando impar, que solamente puede ser el grado de P, Q ó R. Pero entonces al menos uno de P, Q y R tiene coordenadas enteras, y terminamos.





13.3. Problemas

Problema 13.1. En un tablero de ajedrez un caballo parte de una casilla y regresa a esa misma casilla después de varios saltos (de caballo). Muestre que el caballo realizó un número par de movimientos.

Problema 13.2. En un tablero de ajedrez, ¿puede un caballo partir de la esquina inferior izquierda y llegar a la esquina superior derecha, visitando cada una de las casillas del tablero una y solamente una vez?

Problema 13.3. Un tablero de 8×8 está pintado de negro y blanco como tablero de ajedrez. Una *operación* consiste en intercambiar dos renglones o dos columnas del tablero.
¿Se puede llegar, después de una sucesión de operaciones, a que el borde izquierdo del tablero sea blanco y el borde derecho sea negro?

Problema 13.4. (Olimpiada Rusa 1990) ¿Es posible colorear cada casilla de un tablero de 1990×1990 con los colores rojo y azul, de tal forma que las casillas que son simétricas con respecto al centro del tablero sean de colores diferentes y, además, en cada fila y en cada columna del tablero, la mitad de las casillas sean rojas y la otra mitad sean azules?

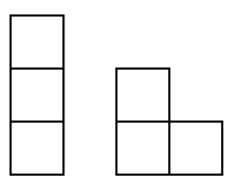
Problema 13.5. Un triángulo equilátero de lado 7 se divide en triangulitos equiláteros de lado 1 mediante paralelas a sus lados. Se recortan del triángulo paralelogramos con un par de lados iguales a 1 y el otro par iguales a 2, siguiendo las líneas de la grilla. Determinar el mayor número de estos paralelogramos que se pueden cortar.

Problema 13.6. Un ratón se quiere comer un queso en forma de cubo de la siguiente manera: Lo parte en 27 cubitos iguales de lados paralelos al cubo original y quiere ir comiendo cada cubito iniciando por un cubito de la orilla y terminando en el cubito central. Además, cada vez que come un cubito, el siguiente cubito que se come es uno de los adyacentes (es decir, uno de los que tienen una cara común con el último comido). ¿Podrá el ratón comerse el queso de esta manera?

Problema 13.7. (IMO, 1999/3) Un tablero de $n \times n$ con n par, se divide en n^2 cuadritos unitarios. Dos cuadritos distintos son *adyacentes* si tienen un lado común. Se marcan N cuadrados unitarios del tablero de manera que cada cuadrado (marcado o sin marcar) es adyacente a por lo menos un cuadrado marcado. ¿Cuál es el menor valor posible de N?

Problema 13.8. En un tablero cuadrado de 9×9 se colocan tetraminós Z, cada uno ocupando exactamente cuatro casillas y sin que se solapen. ¿Cuál es el mayor número de casillas que se pueden cubrir?

Problema 13.9. Un *triminó* es una figura que se forma con tres cuadritos. Hay dos tipos de triminó, mostrados en la figura siguiente; al primero se le llama triminó I y al segundo triminó L.



(a) ¿Cuál es el cuadrado más pequeño que puede llenarse con triminós L?
(b) Encuentre todas las m tales que el rectángulo de $2 \times m$ se puede llenar con triminós L.
(c) Encuentre todas las m tales que el rectángulo de $3 \times m$ se puede llenar con triminós L.
(d) Muestre que los rectángulos de 5×6 y 5×9 se pueden llenar con triminós L.
(e) Si $m > 5$ y 3 divide a m entonces el rectángulo de $5 \times m$ se puede llenar con triminós L.
(f) Si 3 divide a m y el rectángulo de $n \times m$ se puede llenar con triminós L, entonces el rectángulo de $(n+2) \times m$ se puede llenar con triminós L.

(g) Si $n, m \geq 4$ el rectángulo de $n \times m$ se puede llenar con triminós L si y sólo si 3 divide a nm.
(h) Muestre que un cuadrado de $2^n \times 2^n$ se puede cubrir con triminós L, junto con un cuadradito de 1×1.

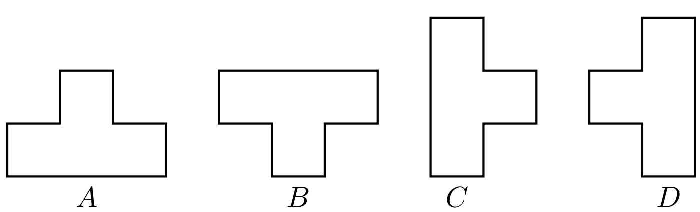
Problema 13.10. (a) Muestre que un rectángulo de $n \times m$ se puede llenar con cuadrados de 2×2 si y sólo si n y m son pares.
(b) Muestre que ningún rectángulo puede ser llenado con tetraminós Z.

Problema 13.11. (a) Muestre que un rectángulo de 3×8 puede llenarse con tetraminós L.
(b) Muestre que si un rectángulo de $n \times m$ se puede llenar con tetraminós L, entonces el número de piezas utilizadas debe ser par.
(c) Muestre que si un rectángulo de $n \times m$ se puede llenar con tetraminós L, entonces el área del rectángulo es divisible entre 8.
(d) Muestre que un rectángulo de $n \times m$ con n par y m divisible entre 4, puede llenarse con tetraminós L.
(e) Muestre el Teorema de Klarner: *Un tablero de $m \times n$ cuadritos se puede cubrir con tetraminós L si y solamente si $m, n \geq 2$ y 8 divide a $m \cdot n$.*

Problema 13.12. En cada casilla de un tablero de 12×12 hay un 0 ó un 1. La operación permitida es elegir 5 casillas consecutivas en dirección horizontal, vertical o diagonal y en esas casillas cambiar cada 0 por 1 y cada 1 por 0. Inicialmente todas las casillas tienen un 0. Determinar si es posible, mediante una secuencia de operaciones permitidas, lograr que todas las casillas del tablero tengan un 1.

Problema 13.13. Un tablero de 300×300 se cubre, sin huecos ni superposiciones, con piezas de dominó. Cada pieza cubre exactamente dos casillas del tablero. Demostrar que las piezas de dominó se pueden colorear con 3 colores, cada pieza con un solo color, de modo que el número de piezas de cada color sea el mismo y que cada pieza tenga a lo sumo 2 vecinas de su mismo color. (Dos piezas son vecinas si hay al menos una casilla cubierta por una de ellas que comparte un lado con una casilla cubierta por la otra.)

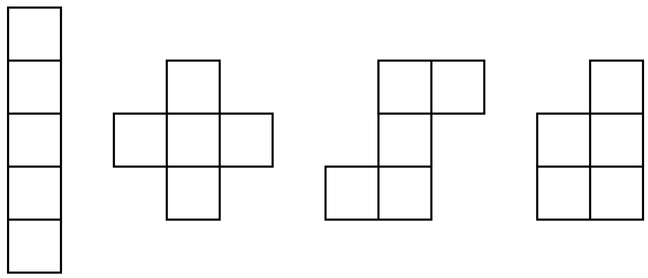
Problema 13.14. (a) Muestre que un rectángulo de 4×4 puede llenarse con tetraminós T.
(b) Muestre que si un rectángulo de $n \times m$ se puede llenar con tetraminós T, entonces el número de piezas utilizadas debe ser par y el área del rectángulo es divisible entre 8.
(c) Muestre que un rectángulo de $n \times n$ puede llenarse con tetraminós T si y sólo si 4 divide a n.
(d) Si un rectángulo de $n \times n$ puede llenarse con tetraminós T y a, b, c y d son los números de tetraminós usados en las posiciones A, B, C y D, respectivamente, muestre que 4 divide a $a + b - c - d$.



Señalemos que existe un resultado que caracteriza a los rectángulos que pueden cubrirse con tetraminós T, pero su demostración usa técnicas más avanzadas.

Teorema (Teorema de Walkup). *Un tablero de $m \times n$ se puede cubrir con tetraminós T si y solamente si 4 divide a m y a n.*

Problema 13.15. Un *pentaminó* es una figura formada con cinco cuadritos unitarios que se pegan por un lado. Suponga que se dispone de suficientes pentaminós de las formas siguientes:



(a) Muestre que un tablero de 8×8 al que se le han recortado sus 4 esquinas puede cubrirse con 12 pentaminós de las formas anteriores.
(b) Muestre que un tablero de 1999×2001 al que se le han recortado sus 4 esquinas no se puede cubrir con pentaminós de las formas anteriores.
Nota: Las fichas solo pueden rotarse en el plano. No se dispone de las fichas que se obtienen reflejando los tipos (3) y (4).

Problema 13.16. (a) A un cuadrado de 11×11 se le ha retirado su cuadrito central de 1×1. Muestre que los restantes 120 cuadritos no pueden ser cubiertos con 15 piezas de 1×8, pero si con 20 piezas de 1×6.
(b) Si intentamos cubrir una cuadrícula de 5×5 con piezas de tamaño 1×2, siempre quedará un hueco. ¿En qué sitios de la cuadrícula puede quedar el hueco?
(c) Un cuadrado de 7×7 se cubre con 16 piezas de 1×3 y una de 1×1. ¿Cuáles son las posibles posiciones de la pieza de 1×1?

Problema 13.17. (10ª OMM/3) Muestre que no es posible cubrir una cuadrícula de 6×6 con 18 rectángulos de 1×2 de tal manera que cada una de las rectas de longitud 6 que forman la cuadrícula y que están en el interior de la misma pase por uno de los rectángulos. Muestre también que sí es posible cubrir la cuadrícula de 6×5 con 15 rectángulos de 1×2 de manera que cada una de las rectas de longitud 5 ó 6 que forman la cuadrícula y que están en el interior de la misma pase por el centro de por lo menos uno de los rectángulos pequeños.

Problema 13.18. ¿Es posible cubrir una cuadrícula infinita de cuadritos de 1×1con dominós (rectángulos de 1×2), de tal manera que cada una de las rectas verticales y horizontales que siguen las líneas de la cuadrícula corte solamente a un número finito de dominós?

Problema 13.19. ((IMO, 1993/3) Se tiene un tablero cuadriculado infinito. Inicialmente, cada casilla de un cuadrado de $n \times n$ está ocupada por una ficha. Un movimiento consiste en saltar de manera horizontal o vertical una ficha sobre otra, a una casilla desocupada. La ficha sobre la que se salta se retira del tablero. Encuentre todos los valores de n para los que es posible acabar con una sola ficha en el tablero.

Problema 13.20. (a) En un tablero de 10×10 una ficha llamada *camello* salta tres lugares adyacentes en una dirección y uno en la dirección perpendicular (como el caballo del ajedrez que salta digamos 2-1, el camello salta 3-1). ¿Es posible que el *camello* pueda ir de un cuadrito a un cuadrito adyacente en varios saltos?
(b) ¿Es posible que en un tablero de $4 \times n$ un caballo de ajedrez salte pasando por todos los cuadritos y regresando al cuadrado inicial?

Problema 13.21. (21ª OMM/5) En cada cuadrado de una cuadrícula de 6×6 hay una luciérnaga apagada o encendida. Una movida es escoger tres cuadrados consecutivos, ya sean los tres verticales o los tres horizontales, y cambiar de estado a las tres luciérnagas que se encuentran en dichos cuadrados. Cambiar de estado a una luciérnaga significa que si está apagada se enciende y viceversa. Muestre que si inicialmente hay una luciérnaga encendida y las demás apagadas, no es posible hacer una serie de movidas tales que al final todas las luciérnagas estén apagadas.

Problema 13.22. ¿Es posible cubrir una cuadrícula de 2003×2003 con rectángulos de 1×2 colocados horizontalmente y con rectángulos de 1×3 colocados verticalmente?

13.4. Soluciones y sugerencias

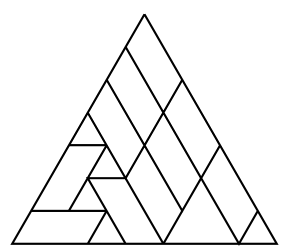
13.1 (pág. 9) Un caballo al saltar en el tablero de ajedrez, pasa de una casilla de un color a otra de diferente color, así, si parte de una blanca, luego de una movida impar estará en negro y luego de una mopvida par estará en blanco. Entonces, si regresa a la casilla de la cual partió, deberá hacer un número par de movimientos.

13.2 (pág. 9) Para hacer el recorrido por todas las casillas necesita 63 saltos y en cada salto pasa de un cuadro de un color a un cuadro del otro color. Si parte de negro después de 63 movidas llega a un cuadro blanco; como los cuadros iníciales y finales son ambos negros es imposible hacer el recorrido.

13.3 (pág. 10) No se puede, el número de cuadros negros y blancos en una columna no cambia después de hacer una operación.

13.4 (pág. 10) No se puede. Las dos mediatrices dividen el tablero en cuatro cuadrados de 995×995. Si fuese posible, sea r la cantidad de casillas rojas en el cuadrado superior izquierdo. Entonces en el cuadrado inferior izquierdo debe haber $995^2 - r$ casillas rojas, igual que en el cuadrado superior derecho. Pero estos dos últimos son simétricos respecto al centro, luego $r = 995^2 - r$, absurdo pues 995^2 es impar.

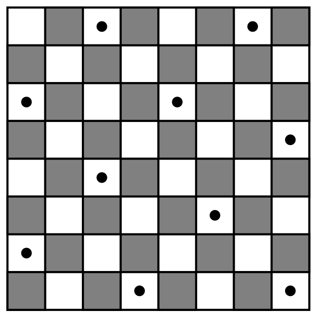
13.5 (pág. 10) Pintamos los triangulitos de blanco y negro, de manera tal que dos triángulos con un lado en común estén pintados de colores distintos. Así resultan 28 triangulitos de un color y 21 del otro color. Ahora bien, cada paralelogramo de los que pide el problema ocupa exactamente dos triangulitos blancos y dos negros, por lo tanto el número de paralelogramos no puede pasar de 10. Para demostrar que es 10 basta con un ejemplo:



13.6 (pág. 10) A los 27 cubitos los coloreamos de blanco y negro de manera tal que cubitos adyacentes sean de diferente color. Si el cubo central es blanco, habrá 13 cubitos blancos y 14 negros. La forma en que el ratón está obligado a comer los cubitos hace que cada vez que se come uno de un color el siguiente que se come es de color diferente. Si inicia comiendo un cubito negro, el último que come es también negro y entonces no es el del centro. Si inicia comiendo un cubito blanco, sólo podrá comer 26 cubitos y entonces no terminará de comer todo el queso.

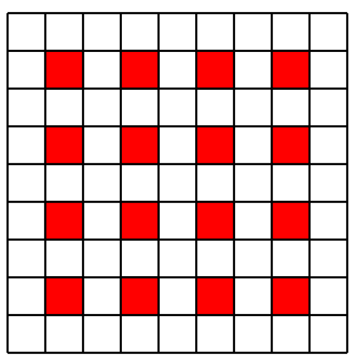
13.7 (pág. 10) Sea $f(n)$ el menor número de cuadritos unitarios que deben marcarse en el tablero de $n \times n$ con n par de manera que se satisfagan las condiciones del problema. Se colorea el tablero de negro y blanco como tablero de ajedrez. Sean $f_B(n)$ el mínimo número de cuadritos blancos que deben de marcarse para que cualquier cuadrito negro tenga un vecino blanco marcado, análogamente se define $f_N(n)$. Debido a la simetría del tablero de ajedrez ($n = 2k$) se tiene que

$f_B(n) = f_N(n)$ y $f_B(n) + f_N(n) = f(n)$. El tablero tiene una diagonal mayor con n cuadritos negros, las diagonales de cuadritos negros y paralelas a la diagonal mayor tienen longitudes: 2, 4,..., $n-2$, n, $n-2$,..., 4, 2. Las diagonales de cuadritos blancos paralelas a las anteriores tienen un número impar de cuadritos. Marquemos alternadamente los cuadritos blancos de las diagonales siguientes: las diagonales de longitudes de la forma $4i-1$ que estén arriba de la diagonal principal negra y las diagonales de longitudes de la forma $4i+1$ que estén por abajo de la diagonal principal negra.

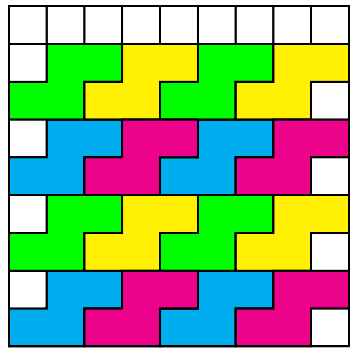


Luego se han marcado $2+4+\cdots+k+(k-1)+\cdots+3+1 = \frac{k(k+1)}{2}$ (o bien $1+3+\cdots+k+(k-1)+\cdots+4+2 = \frac{k(k+1)}{2}$) cuadritos blancos. Es claro que cada cuadrito negro tiene un vecino marcado por lo que $f_B(n) \leq \frac{k(k+1)}{2}$. Consideremos ahora los $\frac{k(k+1)}{2}$ cuadritos blancos marcados, estos tiene por vecinos a puros cuadritos negros y no hay cuadritos negros vecinos comunes a los blancos marcados, por lo que es necesario marcar al menos $\frac{k(k+1)}{2}$ cuadritos negros, luego $f_N(n) \geq \frac{k(k+1)}{2}$. Pero entonces $f_N(n) = f_B(n) = \frac{k(k+1)}{2}$ y $f(n) = k(k+1)$.

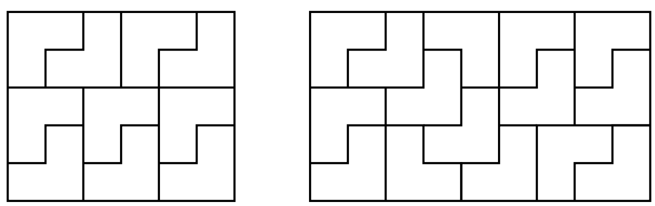
13.8 (pág. 10) El mayor número de casillas que se pueden cubrir es 64.
Consideremos las 16 casillas que aparecen pintadas de rojo en la siguiente figura:



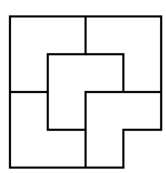
Es evidente que cada pieza que se coloque en el tablero cubre uno y solamente uno de esos cuadrados rojos. Por lo tanto no se pueden colocar más de 16 piezas, porque sólo hay 16 cuadrados rojos. Esto significa que no se pueden cubrir más de $16 \times 4 = 64$ casillas.
Para ver que efectivamente se pueden cubrir 64 casillas, basta observar la siguiente figura:



13.9 (pág. 10) (a) Como el triminó tiene 3 cuadritos, si el cuadrado es de lado n entonces 3 deberá dividir a n^2 y entonces a n. Para $n = 3$ no es posible, hay 3 formas de cubrir el cuadrito que está en la esquina superior izquierda, parta de esto para ver que alguna otra esquina no podrá cubrirse. El de 6×6 se puede cubrir, una manera es unir dos triminós para formar un rectángulo de 2×3; con 6 de estos rectángulos se cubre el cuadrado.
(b) Para cualquier m múltiplo de 3, use rectángulos de 2×3. Solamente hay dos maneras de cubrir la primera columna y la siguiente ficha quedará forzada se formara un rectángulo de 2×3 y el problema se reduce a un rectángulo de $2 \times (m - 3)$.
(c) Igual que en (b), para n múltiplo de 2.
(d) Los siguientes son los dibujos de los acomodos.



(e) Use bloques de 5×6 y de 5×9.
(f) Use la parte (b).
(g) Si el rectángulo de $n \times m$ se puede llenar con triminós entonces 3 divide a nm y entonces divide a n o divide a m, ahora use todo lo anterior.
(h) Por inducción. El caso $n = 1$ es claro, quedando una esquina sin cubrir. El caso $n = 2$ es como en el dibujo siguiente donde se ha dejando una esquina sin cubrir,

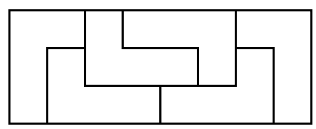


siga este patrón para pasar del caso n al $n + 1$. Note que el cuadrado de lado 2^{n+1} se puede dividir en cuatro cuadrados de lado 2^n.

13.10 (pág. 11) (a) El cuadrito de la esquina superior izquierda solamente se puede llenar de una forma y queda obligado como llenar los dos renglones superiores y las dos columnas de la

izquierda. Luego el rectángulo de $n \times m$ es posible llenarlo con cuadrados de 2×2 si y sólo si el rectángulo $(n-2) \times (m-2)$ es posible llenarlo. Otra manera si n es impar coloree los renglones de negro y blanco en forma alternada, si m es impar entonces coloree las columnas, si inicia con negro habrá mas cuadritos negros que blancos, pero un cuadrado de 2×2 cubre 2 negros y 2 blancos.
(b) Supongamos que el rectángulo es de lados $n \times m$. El cuadrito de la esquina superior izquierda solamente se puede llenar dos formas y queda obligado como llenar los dos renglones superiores o las dos columnas de la izquierda en cada caso. Pero entonces el cuadrito de la esquina superior derecha en el caso m impar (o los dos últimos cuadritos del primer renglón en el caso m par) o el de la esquina inferior izquierda en el caso n impar (o los dos últimos cuadritos de la primera columna en el caso n par) no podrán llenarse.

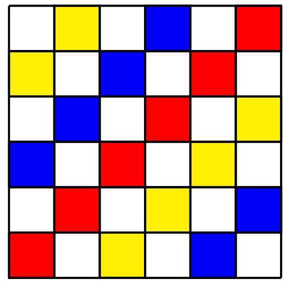
13.11 (pág. 11) (a)



(b) Si el rectángulo de $n \times m$ se divide en tetraminós en forma de L, como cada tetraminó tiene área 4 entonces $nm = 4l$, donde l es el número de tetraminós utilizados. Luego nm es divisible entre 4, entonces alguno de n o m es par, supongamos que m es par, entonces coloreamos en forma alternada las columnas de negro y blanco, hay tantas columnas negras como blancas. Cada tetraminó cubre tres cuadritos de un color y uno del otro color. Sea N la cantidad de tetraminós que cubren 3 negras y B la cantidad de tetraminós que cubren 3 blancas, las fichas del primer tipo cubren $3N$ cuadritos negros y N cuadritos blancos y las del otro tipo cubren B cuadritos negros y $3B$ blancos, luego juntas cubren $3N + B$ cuadritos negros y $N + 3B$ cuadritos negros pero como hay tantos negros como blancos debe suceder que $3N + B = N + 3B$, lo que obliga a que $N = B$. Luego el número de tetraminós $l = N + B$ es par.
(c) Como $mn = 4l$ y l es par se tiene que 8 divide a nm.
(d) Forme rectángulos de 2×4 pegando adecuadamente dos tetraminós, con estos rectángulos de 2×4 es claro como llenar la cuadrícula.
(e) La condición necesaria es la parte (c). Supongamos ahora que 8 divide a nm. Si ambos son pares entonces uno de ellos es divisible entre 4 entonces por la parte (d) terminamos. Supongamos entonces que uno de n o m es impar, digamos que es n y entonces m es divisible entre 8. Dividamos el tablero en rectángulos de $n \times 8$ si mostramos que cada uno de estos se cubre con tetraminós en forma de **L**, terminamos. Pero uno de tales rectángulos lo podemos dividir en uno de 3×8 que sabemos como cubrirlo y uno de $(n-3) \times 8$ y como $n-3$ es par que por (d) se puede cubrir.

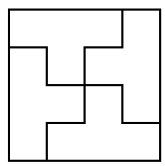
13.12 (pág. 11) Asignemos a cada casilla (i, j) $(0 \le i, j \le 11)$ el «color» $i+j$ mód 5. Inicialmente hay 29 casillas de color 0, 1, 2 ó 3 y 28 casillas de color 4, todas con 0. Cada operación cambia en 1 o en 5 el número de casillas de cada color que contienen 0. Por lo tanto hace falta un número impar de operaciones para tener unos en todas las casillas de clase 0, 1, 2 ó 3, pero hace falta un número par para tener unos en todas las casillas de clase 4. Por lo tanto no es posible lograr que todas las casillas tengan un 1.

13.13 (pág. 11) Dividamos el tablero en cuadrados de 6×6 y pintemos cada cuadrado así:



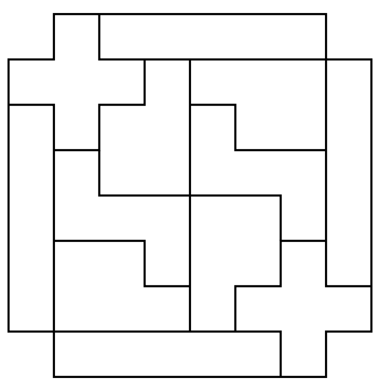
Es claro que cada dominó ocupa una casilla blanca y una casilla pintada y que la cantidad de casillas pintadas de cada color es la misma. Si pintamos cada dominó con el color de la casilla coloreada que ocupa, es obvio que pintamos la misma cantidad de piezas con cada color. También es inmediato notar que cada pieza tiene a lo sumo dos vecinas del mismo color.

13.14 (pág. 11) (a) Una manera de cubrir el cuadrado de 4×4 es así:



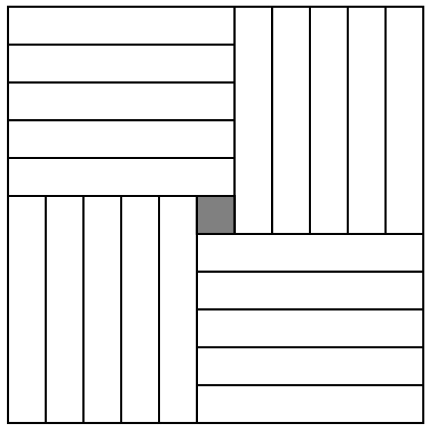
(b) La demostración es similar a las partes (b) y (c) del problema anterior.
(c) Si el cuadrado de $n \times n$ se llena con tetraminós en forma de **T,** por la parte (b) se tiene que 8 divide a n^2 y entonces 4 divide a n. recíprocamente si $n = 4m$, el cuadrado de $n \times n$ se puede dividir en m^2 cuadrados de 4×4 que por (a) se llenan con tetraminós en forma de T.
(d) Por (c) $n = 4m$ para algún m. Coloreamos las columnas en forma alternada de negro y blanco. Las fichas de la forma A y de la forma B cubren 2 cuadritos negros y 2 blancos. Las fichas de las formas C y D cubren 3 negros y 1 blanco o 1 blanco y 3 negros. Quitando las fichas de los tipos A y B, y usando argumentos como en el problema 8 (b) se muestra que $c = d$ y entonces $c + d = 2c$. Como $4(a + b + c + d) = n^2 = 16m^2$ se tiene que $a + b + c + d = 4m^2$ y entonces $a + b - c - d = 4m^2 - 2(c + d) = 4m^2 - 4c$, lo que muestra que 4 divide a $a + b - c - d$.

13.15 (pág. 12) (a) Una manera es la siguiente:

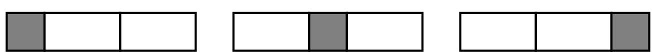


13.16 (pág. 12) (a) El cuadrito central tiene 4 vecinos, el vecino de la derecha no puede ser cubierto por un rectángulo horizontal de 1×8, deberá ser cubierto por un rectángulo vertical,

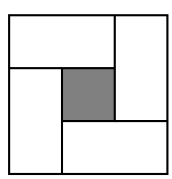
de igual manera el cuadrito a la izquierda del central deberá ser cubierto con un rectángulo de 1×8 vertical. Pero entonces tanto el cuadrito de arriba del central como el de abajo no podrán ser cubiertos. Luego no es posible cubrir la cuadrícula de 11×11 sin el cuadrito cental como se pide.
La siguiente figura muestra cómo cubrir el cuadrado de 11×11 sin el cuadrito central, con rectángulos de 1×6:



(b) Coloreamos el tablero de blanco y negro como tablero de ajedrez, con 13 cuadritos negros y 12 blancos. Como cada pieza de 1×2 cubre un blanco y un negro, quedará sin cubrir un negro. Veamos que cualquiera de los negros puede quedar sin cubrir. Como dos renglones consecutivos del tablero se pueden cubrir, el rectángulo de 4 renglones y 5 columnas que se obtiene de quitar el primer renglón se puede cubrir y en el primer renglón se puede dejar de cubrir cualquiera de los cuadros negros. Esto funciona también para los cuadros negros del tercer y quinto renglón.



El cuadrado de 3×3 que está en la esquina superior izquierda puede cubrirse como en el dibujo siguiente, y es claro como completar el cubrimiento del cuadrado de 5×5. Con este esquema se consideran los casos restantes.

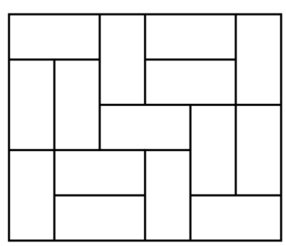


(c) Coloree el cuadrado de la siguiente manera,

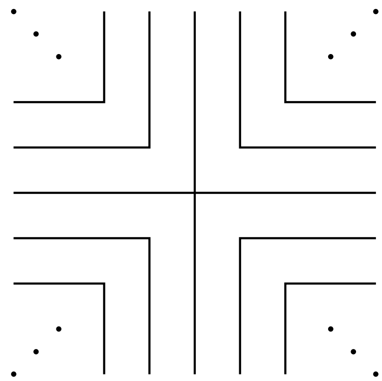
0	1	1	0	1	1	0
1	2	2	1	2	2	1
1	2	2	1	2	2	1
0	1	1	0	1	1	0
1	2	2	1	2	2	1
1	2	2	1	2	2	1
0	1	1	0	1	1	0

Hay dos tipos de rectángulos de 1×3 que cubren el cuadrado, los que cubren un cuadrito de color 0 y dos cuadritos de color 1 y los que cubren un cuadrito de color 1 y dos cuadritos de color 2. Supongamos que todos los cuadritos de color 0 son cubiertos por rectángulos de 1×3, luego deberemos usar 9 piezas del primer tipo y 7 del segundo tipo. Estas piezas cubren $9 \cdot 2 + 7 = 25$ cuadritos de color 1 y $7 \cdot 2 = 14$ cuadritos de color 2, una contradicción. Luego un cuadrito de color 0 se deberá dejar de cubrir. Un argumento como en la parte (b) sirve para ver que hay acomodos donde se dejan de cubrir los cuadritos de color 0.

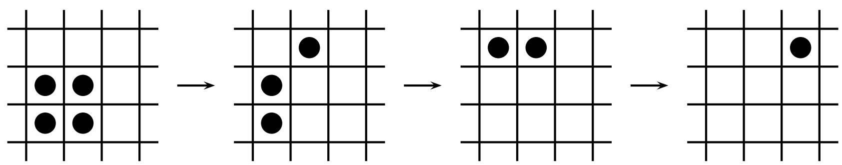
13.17 (pág. 12) Si la cuadrícula de 6×6 se cubre, cada recta interior vertical deberá ser atravesada por un número par de rectangulitos horizontales; esto porque cada rectangulito vertical abarca dos cuadritos. De igual manera cada recta interior horizontal deberá se atravesada por un número par de rectangulitos verticales. El número de rectas interiores es 10 (5 verticales y 5 horizontales) y cada uno de los 18 rectangulitos solamente corta a una de ellas, luego no es posible cubrir la cuadrícula como se pide.
Una forma de cubrir la cuadrícula de 6×5 con las condiciones pedidas se muestra en la siguiente figura:



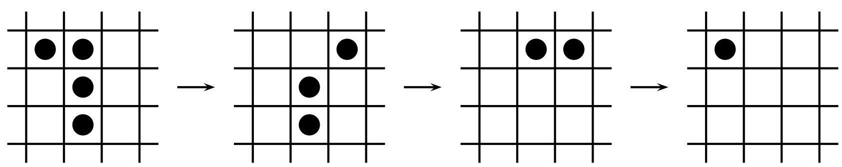
13.18 (pág. 12) Si es posible, divida el plano de la siguiente manera y acomode los dominós de manera natural.



13.19 (pág. 12) Obviamente se puede para $n = 1$ y también para $n = 2$:



La siguiente maniobra permite eliminar una hilera de tres fichas si hay una ficha a un lado de un extremo y una casilla vacía del otro lado:



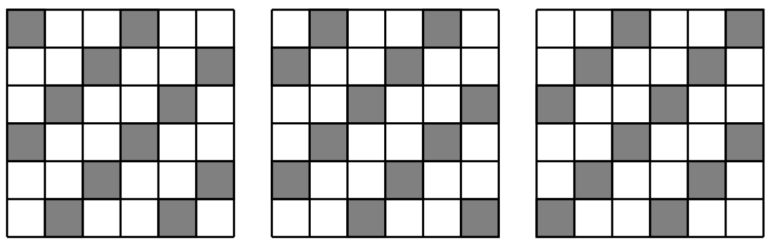
Si $n > 4$ la aplicación reiterada de la maniobra anterior permite eliminar las fichas de una banda de $3 \times n$ en un borde del cuadrado inicial de $n \times n$, y luego las fichas de otra banda de $3 \times (n-3)$, dejando fichas solamente en un cuadrado de $(n-3) \times (n-3)$. De esta manera se puede reducir el caso n al caso $n - 3$. Por tanto, siempre se puede dejar una ficha en el tablero si n no es múltiplo de 3.
Si $n = 3k$ lo anterior no es posible. Para verlo asignemos coordenadas enteras a las casillas, de modo que las ocupadas inicialmente tengan coordenadas (i, j) para $i, j = 1, 2, \ldots, 3k$. Definamos el *tipo* de una casilla (i, j) como $i+j$ mód 3, es decir como 0, 1 ó 2 según sea el resto de la división de $i+j$ entre 3. Sea f_i el número de fichas en casillas de tipo i. Inicialmente $f_0 = f_1 = f_2 = 3k^2$. Con cada movimiento dos de los f_i disminuyen en 1 y el otro aumenta en 1, es decir que los tres cambian de paridad. Por lo tanto los tres tendrán siempre la misma paridad. Si llegase a quedar una sola ficha en el tablero entonces un f_i sería 1 y los otros dos 0, lo cual es imposible.

13.20 (pág. 13) (a) No es posible. Se colorea el tablero de blanco y negro como tablero de ajedrez. Si el camello está en cuadrito de un color después del salto deberá quedar en un cuadrito del mismo color, entonces el camello cuando salta no cambia de color y las casillas adyacentes al cuadrito de origen son de diferente color.
(b) No es posible. Se colorea el tablero con 4 colores siguiendo el siguiente patrón,

1	2	1	2	1	2	1	2	$\cdots$
3	4	3	4	3	4	3	4	$\cdots$
4	3	4	3	4	3	4	3	$\cdots$
2	1	2	1	2	1	2	1	$\cdots$

Un caballo que se encuentre en un lugar de color 1 (respectivamente 2), salta a un cuadrito de color 3 (respectivamente a uno de color 4). Y uno que este en cuadrito de color 3 (respectivamente 4) salta a uno de color 1 (respectivamente 2). Luego el caballo irá saltando intercalando colores 1 y 3 (o bien 2 y 4), pero nunca por los cuatro y entonces no podrá pasar por todos los cuadritos.

13.21 (pág. 13) Como en cada movida cambian de estado tres luciérnagas, la cantidad de luciérnagas encendidas cambia de paridad cada movida y como al inicio hay una encendida es necesario una cantidad impar de movidas. Escojamos una de las siguientes coloraciones del cuadrado de manera que la luciérnaga encendida no quede en un cuadrito coloreado.



En cada movida cambia de estado sólo uno de los cuadrados coloreados, luego la paridad de los cuadrados coloreados encendidos cambia cada movida. Al inicio hay cero cuadrados coloreados encendidos entonces sólo al aplicar una cantidad par de movidas la cantidad de cuadrados coloreados encendidos es par. Por el primer argumento, necesitamos un número impar de movidas y por el segundo argumento es necesario aplicar un número par de movidas, lo cual no es posible.

13.22 (pág. 13) No es posible. Pintemos las columnas alternadamente de negro y blanco, iniciando con negro. Cada rectángulo de 1×2 cubre un cuadríto negro y uno blanco y los rectángulos de 1×3 cubren tres cuadritos del mismo color. Si d es el número de rectángulos de 1×2, faltan por cubrir $2003 \times 1002 - d$ cuadritos negros y $2003 \times 1001 - d$ cuadritos blancos, estos que faltan se deben cubrir con rectángulos de 1×3, luego son necesarios $\frac{2003 \times 1002 - d}{3}$ rectángulos de 1×3 negros y $\frac{2003 \times 1001 - d}{3}$ rectángulos de 1×3 blancos. Estos dos números deberán ser enteros, la diferencia de ellos $\frac{2003}{3}$ también deberá ser entero, pero es no es posible.

13.5. Bibliografía

El segundo capítulo del siguiente libro está dedicado a los problemas que se resuelven mediante coloraciones:

Engel, A., *Problem-Solving Strategies*, Springer, New York, 1998.

El teorema de N. G. de Bruijn y generalizaciones a dimensiones mayores puede verse en:

de Bruijn, N. G., *Filling boxes with bricks*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), 38–40.

El teorema de Walkup puede verse en:

WALKUP, D. W., *Covering a Rectangle with T-Tetrominoes*, Amer. Math. Monthly, **72** (1965), 986–988.

Sobre poliminós en general vea:

GOLOMB, S. W., KLARNER, D. A., *Polyominoes*, en J. E. Goodman, J. O'Rourke (eds.), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, 2nd ed., chapter 15, Chapman Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

GOLOMB, S. W., *Polyominoes* 2nd ed., Princeton University Press, Princeton, 1994.

Otras formas de abordar el Ejemplo 13.6 pueden verse en:

WAGON, S., *Fourteen Proofs of a Result about tiling a Rectangle*, Amer. Math. Monthly, **94**(1987), 601–617.

y en español en

NIETO, J. H., *Taller de Resolución de Problemas Matemáticos*, Talleres de Formación Matemática, LUZ, Maracaibo, 2004 y UCLA, Valencia, 2005. Disponible en `http://www.jhnieto.org/respro.pdf`