Simposio 29 Olimpíada Iberoamericana de Matemáticas

ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA GEOMETRÍA EN LA ENSEÑANZA MEDIA

Profesor: Enech García Martínez

Universidad de Ciencias Pedagógicas

La Habana, Cuba

e-mail: enechgm@gmail.com

enech@cubaeduca.cu

RESUMEN:

La estrategia didáctica aquí presentada forma parte del afán de perfeccionar continuamente la enseñanza de la matemática, en particular, la enseñanza de la geometría. En la investigación que da seguimiento a este perfeccionamiento se pudo constatar que los resultados obtenidos pueden incidir en la mejoría de la Enseñanza y el Aprendizaje del tema de la Geometría.

Esta estrategia consta, básicamente, de tres momentos esenciales "R – R – P", que implementados en ambientes de aprendizaje centrados en la práctica productiva, reflexiva y desarrolladora, contribuye a mejorar el modo de actuación de los estudiantes al enfrentar una situación geométrica.

INTRODUCCIÓN:

La experiencia profesional, la reflexión sobre el perfeccionamiento y el diagnóstico realizado permitió comprobar las dificultades presentadas por los estudiantes y profesores al enfrentar ejercicios y problemas geométricos además de la falta de herramientas que le ayudaran avanzar en el camino de la solución de esas dificultades, por lo que se convirtió en un objetivo prioritario tratar de contribuir a resolver estas deficiencias.

Entre sus objetivos están:

1-Brindar herramientas para enfrentar situaciones geométricas que le permitan avanzar en el camino de la solución.

2-Hacerlos conscientes del uso de esas herramientas.

3-Presentar en los ejercicios y problemas a las situaciones geométricas de múltiples maneras.

DESARROLLO:

Al enfrentar un problema geométrico el estudiante puede, de manera, casi, inmediata "ver" el camino de la solución, más en otras ocasiones no lo vislumbra y se atasca en su quehacer, es allí donde, de manera consciente, puede apelar a sus "estrategias" para poder avanzar en su empeño de solucionar la situación.

La asignatura Matemática que básicamente esta estructurada sobre conceptos, proposiciones, procedimientos y relaciones, necesita del uso de la memoria de los estudiantes. Tener en memoria una serie de recursos (los recursos representan no sólo un inventario de lo que un individuo sabe, sino también la forma en que estos conocimientos están estructurados, conectados), a los cuales también le llamamos "hechos geométricos" es básico y fundamental a la hora de:

1. **R**_ECONOCER (R) su presencia en una situación geométrica,
2. **R**_ELACIONAR (R) lo que “ocurre” en la figura en esa situación y
3. **P**_ROCEDER (P) en correspondencia con las exigencias del ejercicio o problema.

En este accionar, se ha tenido en cuenta que los diferentes contenidos (conceptuales, procedimentales, entre otros) tienen diferentes “tiempos” de asimilación por los estudiantes, y que los procedimentales necesitan de la práctica, la consolidación y el ejercicio en situaciones especialmente organizadas para esto; no tan solo para asimilarlos, sino también para fortalecer la conciencia de usarlos cuando la situación así lo amerite.

La estrategia que puede ser utilizada en diferentes grados o niveles de enseñanza, pudiera clasificarse como “metacognitiva”, pero también tiene en su implementación y desarrollo características de las estrategias “cognitivas” y de “apoyo” (Castellanos, D. ; 2002).

R_ECONOCER___**1er momento de la estrategia**

Después de insistir en la memorización de una serie de hechos geométricos (ángulos, triángulos, cuadriláteros y circunferencia) se les presenta un grupo de ejercicios, ricos en variedad de situaciones, donde necesitan esos conocimientos para poder resolverlos. En estos ejercicios hay que completar los espacios con ángulos, palabras o amplitudes de ángulos; teniendo en cuenta, una vez completado (resueltos), la manera con que se fundamenta, aprovechando el momento para esclarecer algunas inconsistencias del pensamiento de los estudiantes. Tener en memoria una serie de recursos (los recursos representan no sólo un inventario de lo que un individuo sabe, sino también la forma en que estos conocimientos están estructurados, conectados) o “Hechos Geométricos” es básico y fundamental a la hora de:

R_ECONOCER su presencia en una situación geométrica,

En este primer momento de la estrategia se trata de situar al estudiante frente a múltiples y diferentes situaciones para que pueda reconocer las características del ejercicio y resolverlo. Hay que recordar que esta primera parte está precedida por la memorización de una serie de hechos geométricos dados en un material especialmente elaborado para ese fin.

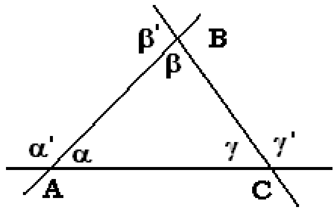
En diferentes ocasiones al enfrentar una situación geométrica la persona se percata, al no poder avanzar en la resolución, de que no tiene “vista”, que no puede darse cuenta de lo que está “claro” para otros en la figura, no logra ver las “señales” que a los” ojos” de otros son perceptibles. Afloran aquí una serie de dimensiones que interviene en esta problemática.

Tener en su memoria la información útil para la solución (Jiménez, C.; 2000), contar con mecanismos para recuperarlos, creer que puede identificarlos y manipularlos, conocer acerca de sus posibilidades de trabajar acertadamente en el tema, entre otros, son componentes esenciales en este primer momento de la estrategia.

Después de insistir en la memorización de una serie de hechos geométricos (ángulos, triángulos, cuadriláteros y circunferencia) se les presenta un grupo de ejercicios, ricos en variedad de situaciones, donde necesitan ese conocimiento para poder resolverlos. En estos ejercicios hay que completar los espacios con ángulos, palabras o amplitudes de ángulos; teniendo en cuenta, una vez completado (resueltos), la manera con que se fundamenta. Aprovechando el momento para esclarecer algunas inconsistencias del pensamiento de los estudiantes.

Ejemplo1:(los ángulos y los ángulos en los triángulos)

1.1-En la figura α', β' y γ' son ángulos exteriores del Δ**ABC**.



$\alpha+\beta+\gamma=$ ______ (por suma de los ángulos ____________ de un Δ)

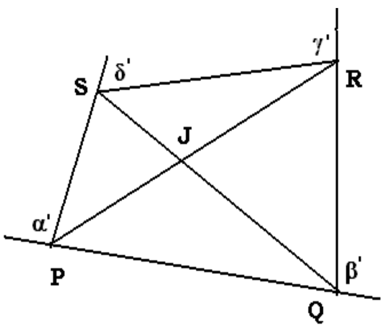
α' es un $\angle$ (ángulo) exterior del Δ**ABC**, por ser adyacente al ángulo interior $\angle$______

$\alpha'+\beta'+$____ $=360^0$ (por suma de los ángulos exteriores de un Δ**)**

$\gamma'=\alpha+$____ (por Teorema del ángulo exterior de un Δ)

1.2- En la figura: α', β' , γ' y δ' son ángulos exteriores del cuadrilátero **PQRS**.

$\angle SPQ+\angle PQR+\angle QRS+\angle$______ $=360^0$ (por suma de ángulos interiores de un cuadrilátero)



$\angle PJS=\angle$______ (por ser ángulos opuestos por el vértice)

β' es un $\angle$ exterior del cuadrilátero **PQRS**, ya que es

adyacente al ángulo interior $\angle$_____

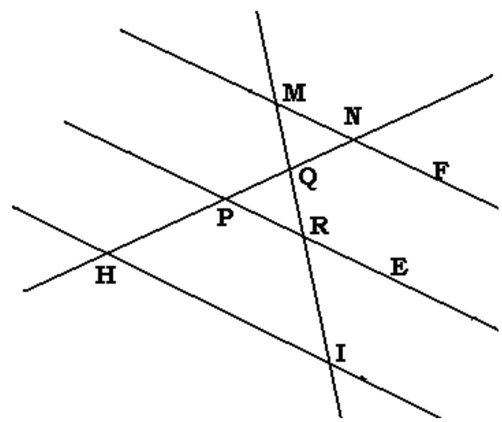
$\angle PJQ=\angle$ __ J __ (por ser ángulos ________________________)

$\alpha'+\beta'+\gamma'+$____ $=360^0$ (por suma de ángulos __________________ de un cuadrilátero)

$180^0-\beta'=\angle$ __ Q __ (por ser ángulos adyacentes)

En el Δ**PRS,** $\delta'=\angle SPR+\angle$______ (por Teorema del ángulo exterior de un triángulo)

1.3-En la figura **MN // PR // HI** $(r_{MN} // r_{PR} // r_{HI})$



$\angle MQN=\angle PQR$ (por ________________________________)

$\angle NMQ=\angle$______ (por ser ángulos correspondientes entre **MN // PR**)

$\angle HIR+\angle IRP=$______^{0} (por ser ángulos conjugados entre **PR // HI**)

$\angle MNQ=\angle QP$__ (por ser ángulos ________________ entre **MN // PR**)

$\angle HPR+\angle$______ $=180^0$ (por ser ángulos adyacentes)

$\angle QRE=\angle$ __ Q __ $+\angle$______ (por Teorema del ángulo exterior de un triángulo)

$\angle HIR=\angle NMQ$ (por ser ______________________________ **MN // HI**)

$\angle NMQ\neq\angle NQR$ (por ser __________________ y no estar entre ________________)

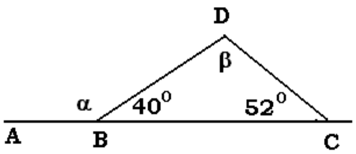
$\angle QRP=\angle$ __ M __ (por ser ____________________________ **MN // PR**)

$\angle QRP=\angle$ __ I __ (por ser ____________________________ **PR //** ____)

Ejemplo 2 (cálculo de ángulos y justificación del procedimiento)

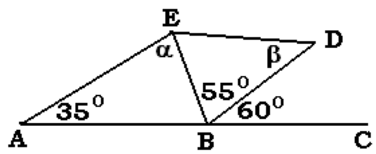
2.1En las siguientes figuras calcule la amplitud de α y de β, o de una de las dos, según aparezca en el inciso. Recuerde que, aunque no se lo pidan; **siempre debe justificar,** lo que en datos no se le dé de **forma explícita**.

a) **A**, **B** y **C** puntos alineados

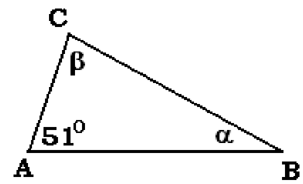


b) **A**, **B** y **C** puntos alineados; base $\overline{AC}$.

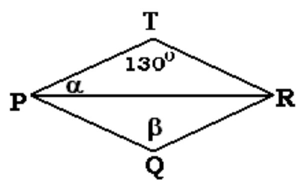
$\overline{EB}$ bisectriz del $\angle AED$



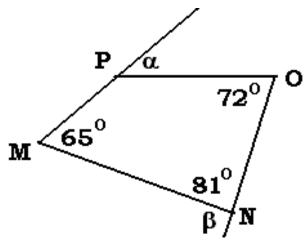
c) $\triangle$**ABC** isósceles de



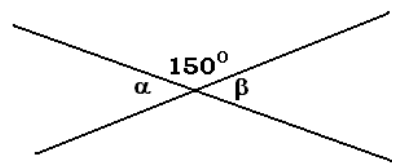
d) **PQRT** Rombo



e)



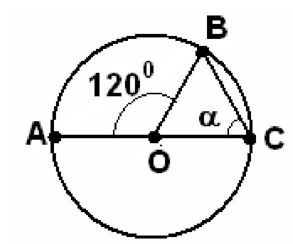
f) La amplitud de $\alpha+\beta$



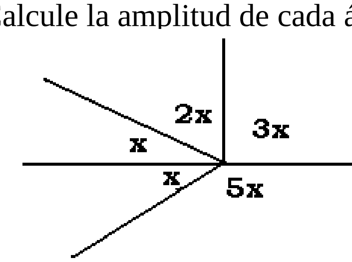
es:

I) **15^0** II) **30^0** III) **60^0** IV) **180^0**

g) En la circunferencia de centro **O** y diámetro $\overline{AC}$.

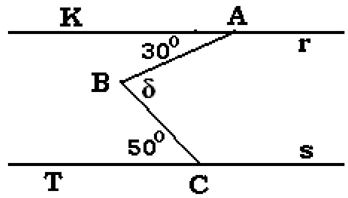


9. Calcule la amplitud de cada ángulo



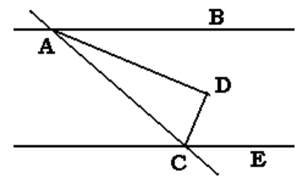
Ejemplo 3. (Cálculo de ángulos en situaciones “novedosas”)

3.1 En la figura: $r_{KA} // s_{TC}$ Calcule δ



3.2. En la figura: $r_{AB} // r_{CE}$; $\angle BAC = 44^0$

$\overline{AC}$ y $\overline{CD}$ bisectrices de los $\angle BAC$ y $\angle ACE$ respectivamente. Calcula amplitud de $\angle ADC$



Sobre los ejercicios de los Ejemplos

Del **Ejemplo 1**(los ángulos y los ángulos en los triángulos) , NOTESE entre otras cosas que:

- en los ejercicios 1.1 y 1.2 se presentan en diferentes situaciones los conceptos y las relaciones entre los ángulos de un triángulo.
  Se aprovecha aquí para esclarecer una inconsistencia en los alumnos, el “ángulo exterior”.
- en el ejercicio 1.3 se presentan ángulos entre rectas (con vértices diferentes) en relaciones de igualdad y de desigualdad.
  Se aprovecha aquí para precisar, con la igualdad y la desigualdad de ángulos entre rectas (con diferentes vértices), la necesidad de declarar el paralelismo.

Del **Ejemplo 2** (cálculo de ángulos y justificación del procedimiento) , NOTESE entre otras cosas que:

- En el ejercicio 2.1 se pide calcular amplitudes de ángulos en situaciones simples, exigiéndoseles también la justificación de su trabajo.
- Con el ejercicio 2.2 se precisa que **solo es posible** decir que la suma de todos es $\mathbf{360^0}$ y con ello se esclarecen inconsistencias de suposiciones visuales.

Del **Ejemplo 3** (Cálculo de ángulos en situaciones “novedosas”), NOTESE entre otras cosas que:

- Se muestra algunas técnicas de trabajo no usuales en las clases como son las construcciones auxiliares (trazado de paralelas, de perpendiculares, de prolongaciones de segmentos)

  Se puede generalizar sobre la amplitud de ángulo formado por las bisectrices.

IMPORTANTE: Una vez concluido el proceso de solución de una (o varias) situaciones, es muy relevante la reflexión sobre su quehacer en cada problema, precisar sus metas, lo que hizo para lograrlas, entre otras. No dejando de meditar sobre ¿en qué otro ámbito piensa que pueda aplicarla?, ¿ bajo qué condiciones?.

R_ELACIONAR__**2^do^ momento de la estrategia**

Poder establecer relaciones en la figura (ángulos, segmentos, entre otros) es motivador para el alumno y vital cuando intenta resolver ejercicios geométricos; de ahí que

R_ELACIONAR lo que “ocurre” en la figura sea otro <u>momento</u> <u>especial</u>.

Aquí se pone al estudiante frente a situaciones disímiles con exigencias en los incisos de los ejercicios, que propician un orden en el establecimiento de relaciones.

La frustración que deja en los alumnos el no poder establecer las relaciones que tan bien otros establecen, es inhibidora de los recursos (cognitivos, afectivos u volitivos) que puede poner a su disposición al enfrentar un ejercicio o un problema geométrico.

Contar con estrategias para poder establecer estas relaciones es básico y vital en la posición (de aceptación, entre otras) que el alumno muestra al enfrentar una situación geométrica. Además, al establecerlas, se coloca en un buen lugar para poder avanzar en el camino de la solución.

Establecer relaciones en una figura geométrica suele poner a los estudiantes en el camino hacia la solución, esta importante fase puede pasar por diferentes etapas. Al querer **relacionar un ángulo** es básico situarlo en el contexto donde se encuentra, por ejemplo: <u>a</u> <u>que</u> <u>figuras</u> <u>él</u> <u>le</u> <u>pertenece</u>, para más tarde y <u>aprovechando</u> <u>las</u> <u>propiedades</u> <u>de</u> <u>la</u> <u>figura</u> encontrar sus relaciones con otros ángulos.

Después de haber trabajado en un primer grupo de ejercicios, con **hechos geométricos** básicos en diferentes figuras y haber mejorado su precisión en las justificaciones a las descripciones geométricas, así como la utilidad con diferentes y “novedosas” técnicas geométricas es que llegamos a una **segunda etapa**…

Se presentan aquí ejercicios, con diferentes figuras, para que <u>desarrolle habilidades</u> que le permitan **enfrentarse y “atacar”** los ejercicios geométricos con éxito:

Establecer **relaciones de igualdad** entre amplitudes de ángulos y entre longitudes de segmentos y su justificación, la práctica, esta **habilidad** es **vital** para poder seguir avanzando en el camino de la solución de situaciones geométricas.

En los ejercicios y problemas que se proponen se ofrece **la orden** para todos en cuatro incisos a, b, c y d. Responder a estos incisos los llevará a establecer varias relaciones en cada una de las situaciones geométricas planteadas en los ejercicios
El primer ejercicio, **es un ejemplo,** en él se van respondiendo cada uno de los incisos, o sea, se dan las igualdades o proposiciones y sus justificaciones, con ello se pretende mostrar una forma de responder lo pedido.
En los demás propuestos se dejan espacios en blanco entre uno y otro inciso, sugiriendo la cantidad mínima de relaciones que usted debe establecer, no obstante, en los primeros…, se dan igualdades o partes de ellas para que le ayude a empezar.

Satisfaga, en cada uno de los ejercicios, las exigencias de los incisos a, b, c y d :

a) <u>Situar</u> al ángulo α en la figura.
b) <u>Establecer las relaciones</u> que tiene α con otros ángulos.
c) Establecer las <u>OTRAS relaciones</u> entre los ángulos que hay en la figura.
d) Establecer, de ser posible, <u>relaciones entre segmentos.</u>

Nota: En aquellos ejercicios que existe **información implícita** (ejemplo: triángulos, paralelogramos, entre otras) es importante hacerla **explícita** para poder utilizarlas y establecer las relaciones del ángulo α con otros ángulos o entre otros ángulos. La llamaremos **preliminares**.

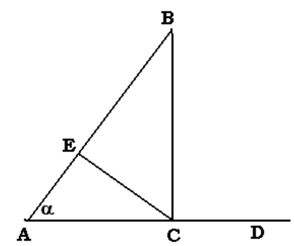
En estas **preliminares** **debe establecerse**, sobre todo, las **clasificaciones** de las distintas figuras implicadas en el ejercicio, de manera que a partir de ellas, puedan facilitarse la búsqueda de las relaciones pedidas.

Es por todo lo anteriormente explicado que:

Usted, antes de empezar a establecer las relaciones pedidas, ***observe, analice y decida*** *si en el ejercicio existen relaciones PRELIMINARES*

de existir declárelas……

Ejemplo 1:



1.1 En la figura:

$\overline{\mathbf{BC}}$ bisectriz del $\angle\mathbf{ACD}$, llano

$\overline{\mathbf{EC}}$ altura del Δ**ABC,** con respecto al lado $\overline{\mathbf{AB}}$

R/…

PRELIMINARES: $\angle\mathbf{ACB} = \angle\mathbf{BCD} = \mathbf{90^0}$ (por ser $\overline{\mathbf{BC}}$ bisectriz de un ángulo llano, $\angle\mathbf{ACD} = \mathbf{180^0}$)

Δ**ABC** , Δ**AEC** y Δ**BEC** rectángulos.

a) (Situar a α …)

α es un ángulo interior del Δ**ABC** rectángulo en **C**

α es un ángulo interior del Δ**AEC** rectángulo en **E**

b) (Establecer las relaciones que tiene α …)

En el Δ**AEC**

$\alpha + \angle\mathbf{ACE} + \angle\mathbf{AEC} = \mathbf{180^0}$ (por suma de ángulos interiores de un triángulo)

$\alpha + \angle\mathbf{ACE} = \mathbf{90^0}$ (por ser los ángulos agudos del Δ**AEC** rectángulo)

En el Δ**ABC**

$\alpha + \angle\mathbf{ABC} + \angle\mathbf{ACB} = \mathbf{180^0}$ (por suma de ángulos interiores de un triángulo)

$\alpha + \angle\mathbf{ABC} = \mathbf{90^0}$ (por ser los ángulos agudos del Δ**ABC** rectángulo)

$\alpha + \angle\mathbf{B} = \angle\mathbf{BCD}$ (por Teorema del ángulos exterior de un triángulo)

c) (Establecer las OTRAS relaciones entre los ángulos)

En el Δ**EBC**

$\angle\mathbf{B} + \angle\mathbf{BEC} + \angle\mathbf{ECB} = \mathbf{180^0}$ (por suma de ángulos interiores de un triángulo)

$\angle\mathbf{CEB} = \angle\mathbf{AEC} = \mathbf{90^0}$ (por ser $\overline{\mathbf{EC}}$ altura del Δ**ABC** con respecto $\overline{\mathbf{AB}}$)

d) En el Δ**ABC** rectángulo en **C**

$\overline{\mathbf{AB}}^{\mathbf{2}} = \overline{\mathbf{AC}}^{\mathbf{2}} + \overline{\mathbf{BC}}^{\mathbf{2}}$ (por Teorema de Pitágoras)

En el Δ**AEC** rectángulo en **E**

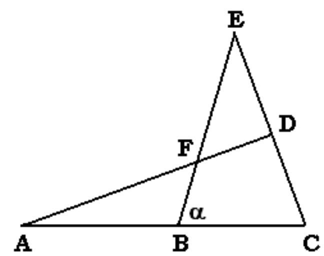
$\overline{\mathbf{AC}}^{\mathbf{2}} = \overline{\mathbf{AE}}^{\mathbf{2}} + \overline{\mathbf{EC}}^{\mathbf{2}}$ (por Teorema de Pitágoras)

En el Δ**CEB** rectángulo en **E**

$\overline{BC}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EC}^2$ (por Teorema de Pitágoras)

Nótese que en la respuesta a cada inciso se dice el triángulo (u otra figura) donde se van a establecer las relaciones. Esto **permite organizar** y que disminuyan las posibilidades de que se "pierda" alguna relación.

Ejemplo 2 (se dan igualdades y sus justificaciones, o parte de ellas)



2.1 En la figura:

$\overline{AD} \perp \overline{EC}$

Δ**BCE** isósceles de base $\overline{BC}$

R/…

PRELIMINARES: Δ**FDE** y Δ**ADC** rectángulos.

a) (Situar a α …)

α es un ángulo ______________ del Δ**BCE**

α es un ángulo ______________ del cuadrilátero _________

α es adyacente con $\angle$______

α es un ______________ exterior del Δ______

α es un ángulo base del Δ______ Isósceles de base ____

b) (Establecer las relaciones que tiene α …)

En Δ**BCE** isósceles de base $\overline{BC}$

$\alpha = \angle C$ (por ser ángulos __________ del Δ____)

$\alpha + \angle C + \angle E = 180^0$ (por suma de __________________________del Δ______)

$2\alpha + \angle E = 180^0$ (por ser $\angle E$ principal y α ángulo base)

En Δ**ABF**

$\alpha = \angle$___$+\angle$___ (por Teorema del ángulo ___________ de un triángulo)

En el cuadrilátero **BCDF**

$\alpha + \angle C + \angle CDF + \angle$____ = ____^{0} (por suma de ángulos ___________________de un cuadrilátero)

c) (Establecer las OTRAS relaciones entre los ángulos)

$\angle EDA = \angle A$____ $= 90^0$ (por ser $AD \perp EC$)

$\angle AFB = \angle DFE$ (por ser ____)

En Δ**ACD**

$\angle A + \angle C + \angle$__**D**__ $= 180^0$ (por ____)

$\angle A + \angle C =$ ____^{0} (por ser los ángulos _______de un triángulo ______________________en **D**)

$\angle ADE = \angle A + \angle C$ (por Teorema ________________________________)

En Δ**FED**

$\angle E + \angle FDE + \angle$ _____ $=$ _____^{0} (por_____________________________)

$\angle E + \angle EFD =$ ____^{0} (por ser los ángulos _____________ de un triángulo rectángulo)

$\angle BFD = \angle FDE + \angle E$ (por Teorema________________________________)

$\angle FDC = \angle$ ______ $+ \angle E$ (por Teorema______________________________)

En Δ**FAB**

$\angle A + \angle ABF + \angle$ _____ $=$ _____^{0} (por ____________________________)

$\angle DFB = \angle A + \angle$ ______ (por Teorema____________________________)

d) (Establecer relaciones entre los **segmentos**)

En el Δ**ADC** rectángulo en **D**

$AC^2 = AD^2 +$ ____^{2} (por Teorema de ________________)

En el Δ**FED** rectángulo en **D**

$FE^2 =$ ____$^2 +$ ____^{2} (por ____________________________________)

En Δ**EBC** Isósceles de base **BC**

$EB =$ ____ (por ser lados no bases de un triángulo Isósceles).

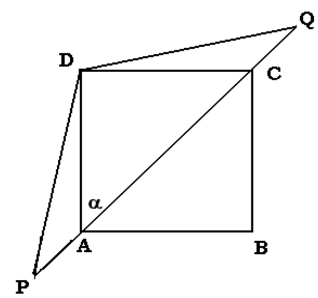
Ejemplo 3 (se dejan espacios en blanco entre uno y otro inciso, sugiriendo la cantidad mínima de relaciones a establecer;)

3.1 En la figura:

ABCD cuadrado

$\angle PDC = \angle QDA$

$\overline{PC} = \overline{AQ}$



R/…

PRELIMINARES: Δ**ACD** y Δ___ Rectángulos e Isósceles de base $\overline{AC}$

(por ser $\overline{AC}$ diagonal del cuadrado ______)

a) (Situar a α …) $\leftrightarrow$ (no menos de 6 relaciones)

b) (Establecer las relaciones que tiene α …) $\leftrightarrow$ (no menos de 6 relaciones)

En Δ**ACD** Rectángulo en _____

En Δ**APD** . . . .

c) (Establecer las OTRAS relaciones…….) $\leftrightarrow$ (no menos de 8 relaciones)

$\angle PAD = \angle PDC - \angle CDA$

$\angle QDC = \angle QDA - \angle$ __D__ $\therefore$ $\angle PAD = \angle QDC$ (por diferencia de ángulos iguales)

En Δ**QCD**

d) (Establecer relaciones entre los **segmentos**) $\leftrightarrow$ (no menos de 6 relaciones)

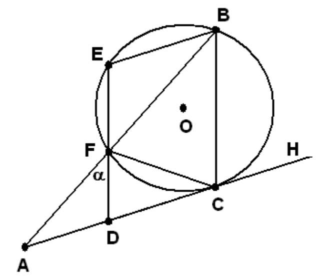
$\overline{PA} = \overline{PC} - \overline{AC}$

$\overline{QC} = \overline{AQ} -$ ____ $\therefore$ $\overline{PA} =$ ____ (por diferencia de segmentos iguales)

En Δ**ACD** Rectángulo e Isósceles

En Δ**ACB** Rectángulo e Isósceles
En el cuadrado **ABCD**

3.2 En la figura :
C, **B**, **E** y **F** puntos de la circunferencia de centro en **O**.
BECD paralelogramo.
$\overline{AC} = \overline{ED}$
$\overline{AC}$ Tangente en **C**.
R/…
PRELIMINARES:



a) (Situar a α …) $\leftrightarrow$ (no menos de 6 relaciones)
b) (Establecer las relaciones que tiene α …) $\leftrightarrow$ (no menos de 6 relaciones)
c) (Establecer las OTRAS relaciones…….) $\leftrightarrow$ (no menos de 8 relaciones)
d) (Establecer relaciones entre los **segmentos**) $\leftrightarrow$ (no menos de 4 relaciones)

Sobre los ejercicios de los Ejemplos

Del **Ejemplo 1**. (se dan igualdades y sus justificaciones, o parte de ellas), NOTESE entre otras cosas que:

- Después de situar al ángulo α, se da en cada inciso las figuras en las que se van a establecer las relaciones.

Del **Ejemplo 2**. (se dejan espacios en blanco entre uno y otro inciso, sugiriendo la cantidad mínima de relaciones a establecer;)

- Se dejan espacios en cada inciso para que sean completados con relaciones, todavía aquí se brindan algunas de las figuras en las que pueden establecerse las relaciones. Se aprovecha la situación para mostrar <u>algunas</u> <u>técnicas</u> de trabajo <u>no</u> <u>usuales</u> <u>en</u> <u>las</u> <u>clases</u> como son la “suma o diferencia de ángulos o segmentos iguales”

- Se dejan los espacios, pero ya no se dan la figuras en las que se pueden establecer las relaciones; <u>se</u> <u>les</u> <u>exige</u> <u>un</u> <u>número</u> <u>mínimo</u> <u>de</u> <u>relaciones.</u>

IMPORTANTE: Una vez concluido el proceso de solución de una (o varias) situaciones, es muy relevante la <u>reflexión</u> <u>sobre</u> <u>su</u> <u>quehace</u>r en cada problema, la secuencia al establecer las relaciones (hacerlo de manera ordenada__por figura), la importancia de las relaciones preliminares, entre otras. <u>No</u> <u>dejando</u> <u>de</u> <u>meditar</u> sobre ¿en que otro ámbito piensa que pueda aplicarla?, ¿ bajo qué condiciones?.

P_ROCEDER (P) __**3 ^{er} momento de la estrategia** .

A este tercer momento lo antecedieron otros dos momentos donde el alumno fue adquiriendo confianza en su quehacer, conformando un conjunto de acciones conscientes, diseñadas bajo un plan y dirigidas a alcanzar determinadas metas. Es en este “último” momento de la estrategia, donde se juntan sus conocimientos para poner en práctica su proceder, su manera de hacer; donde su modo de actuar se manifiesta y se fortalece. De ahí que

P_ROCEDER (P) en correspondencia con las exigencias del ejercicio.

Sea el momento definitorio en su accionar, donde se ponga a prueba lo aprendido en la resolución y reflexión de los ejercicios y problemas enfrentados.

Para este momento el alumno <u>cuenta</u> <u>con</u> <u>un</u> <u>grupo</u> <u>de</u> <u>recursos</u> <u>y</u> <u>estrategias</u> que le permiten <u>reconocer</u> <u>y</u> <u>aflorar</u> la información que está implícita en la situación que enfrenta, <u>estableciendo</u> <u>las</u> <u>relaciones</u> <u>que</u> <u>considere</u> <u>pertinentes</u> para concebir y dar cumplimiento, de manera conciente, a <u>un</u> <u>plan</u> <u>que</u> <u>lo</u> <u>conduzca</u> <u>al</u> <u>logro</u> <u>de</u> <u>la</u> <u>meta</u>.

Los ejercicios y problemas con que debe contar el profesor para seleccionar su sistema de ejercicios y alcanzar los objetivos trazados deben estar conformados para que cumplan determinadas exigencias, entre ellas:

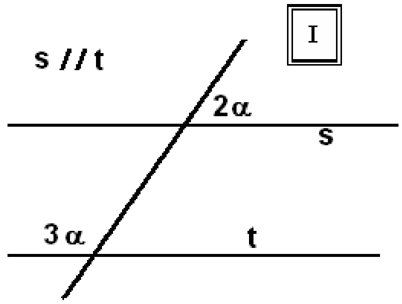
- Que tengan un reto, que **no sean simples rutinas a emplear**, que lleguen a ser exigentes, pero **accesibles**.
- Que demanden un plan y una reflexión.
- Que permitan un número diferentes de métodos (estrategias) de solución.
- Que (algunos) incluyan varias soluciones.
- Que incluyan una variedad de procesos matemáticos y operaciones pero **no en forma obvia o rutinaria**.
- **Que cuando un estudiante lo resuelva** deba ser posible identificar los procesos y operaciones empleados, así como el plan para resolverlo y las estrategias usadas.

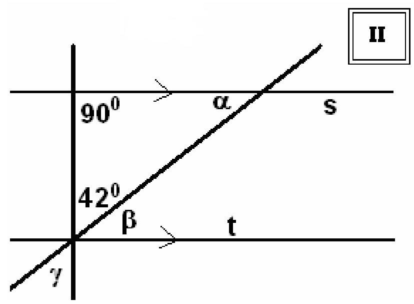
No obstante antes de presentar el sistema de ejercicios elegido por el profesor a los estudiantes, se discute con ellos sobre el proceder:
De manera que puede:

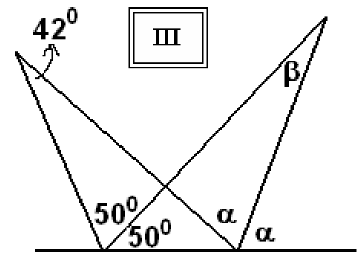
- Dibujar a mano alzada la figura, eso los implica en las características del problema a solucionar.
- Incluir los datos en la figura, eso les permite visualizar en un solo lugar los hechos geométricos.
- Establecer las relaciones que se puedan en la figura, situando previamente al elemento en su contexto.
- Reflexionar sobre el camino de la solución y decidir escribirla, recordando en cada paso:
    - la precisión al describir cada relación y su justificación**.**
    - el orden a seguir en el procedimiento escogido.

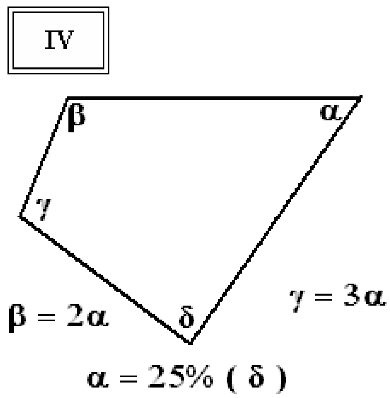
En los ejercicios y problemas se utilizan (en este caso para dar información) algunas **formas** de **denotar** a los **segmentos iguales** y a los **ángulos iguales o múltiplos (α, 2α ,..** entre otros..**)**, tal y como hacen muchas personas al intentar resolver un ejercicio o problema **querer tener**, en la figura de análisis, los datos o resultados; de forma tal que, al tener allí **reunida toda la información**, le ayude a esclarecer la situación planteada.

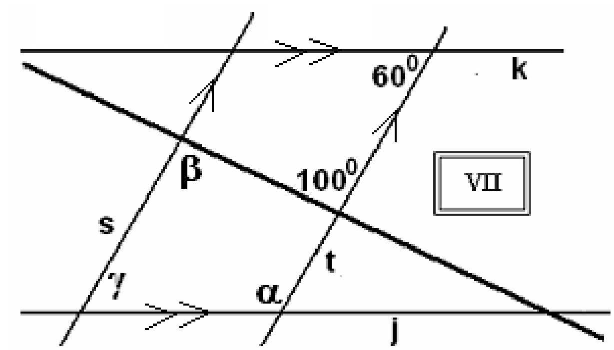
1. En las siguientes ejercicios calcule la amplitud de los ángulos α, β, δ y γ.

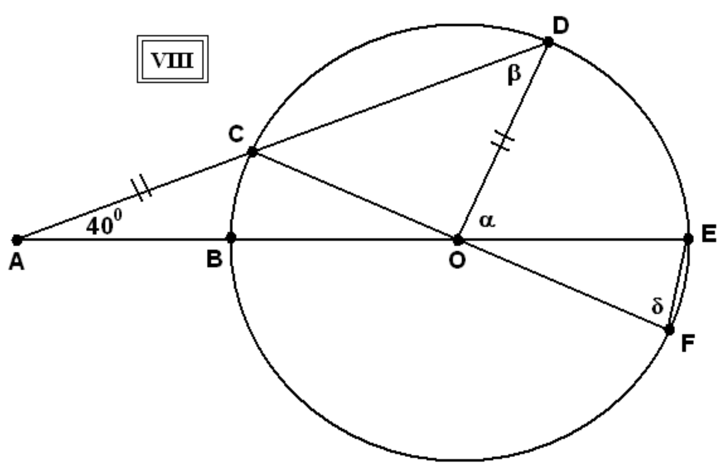


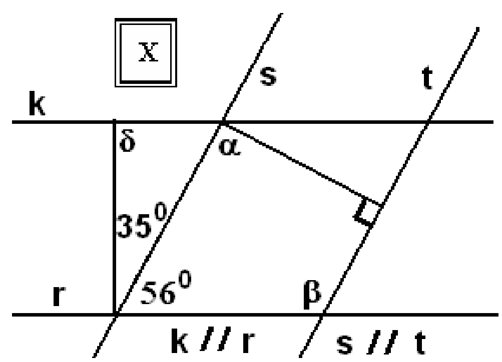












Ej.# 2.

2-En un $\triangle$**ABC** rectángulo en **B**; se tiene que $\mathbf{r_{FD}}$ es la mediatriz del lado $\overline{\mathbf{AB}}$. **F** punto de $\overline{\mathbf{AB}}$; además $\angle\mathbf{ACB} = \mathbf{40^0}$.

a) Pruebe que $\overline{\mathbf{BD}}$ es la mediana del $\triangle$**ABC** con respecto al lado $\overline{\mathbf{AC}}$.

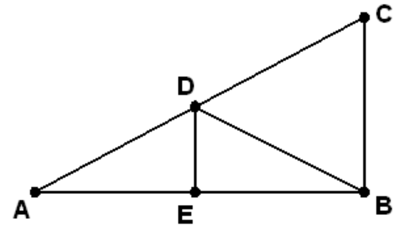
b) Clasifique al cuadrilátero **FBCD**. Justifique.

3- Entre dos carreteras rectilíneas y paralelas, que distan entre si **80m**, hay colocado un terreno que mide sobre una de ellas **240m** y sobre la otra **180m**; los otros bordes de terreno son unas cercas rectilíneas, una de ellas es perpendicular con las carreteras. Halle el área y el perímetro del terreno.

4- En la figura el punto **D** equidista de los vértices del Δ**ABC**, $\overline{\mathbf{DE}}$ es altura en el Δ**ADB** con respecto al lado $\overline{\mathbf{AB}}$.

a) Demuestra que Δ**ADE** ~ Δ**ABC**

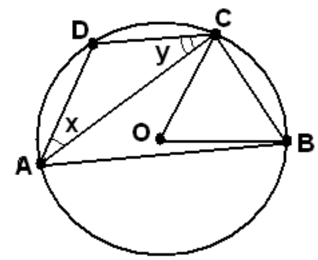
b) Si $A_{\Delta ABC} = 8u^2$, halla el área de Δ**AED**



5- En la figura, **arco (BC)** es **un sexto** de la circunferencia de centro **O**. **ABCD** cuadrilátero inscrito en la circunferencia.

a) ¿Cuánto vale $x + y$ si $\overline{AC} = \overline{AB}$?. Justifique.

b) Si se conoce que $\dfrac{\text{arco (DC)}}{\text{arco (AB)}} = \dfrac{2}{5}$ clasifique, según sus lados al triángulo **ADC**. Justifique.



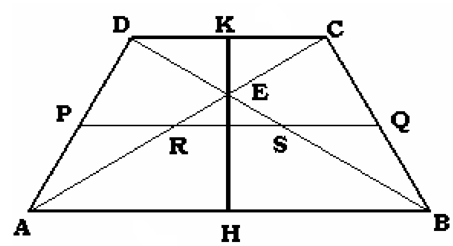
6- En la figura: **ABCD** es un trapecio isósceles; $\overline{\mathbf{PQ}}$ paralela media del trapecio; $\overline{\mathbf{KH}}$ de **8cm** de longitud es altura del trapecio y bisectriz del $\angle AEB$.

Si $\overline{PQ} = 12cm$, $\overline{RS} = 4cm$ y $\overline{CS}$ // $\overline{DP}$.

a) Halle las longitudes de las bases del trapecio **ABCD**

b) Determine el área del trapecio.

c) Pruebe que Δ**AED =** Δ**BEC**.



Sobre los ejercicios

- En las diferentes situaciones que se presentan, se brindan una serie de “señales” que dan una información y que permiten reunirlas en la figura.
- En algunos se tienen figuras similares pero situaciones diferentes.
- Se presentan situaciones reales que necesita de destrezas e imaginación
- No se les exige el valor de la amplitud de un determinando ángulo ,se pide la clasificación, según sus lados, de un triángulo en una situación no muy común.
- Se presentan situaciones con el trapecio isósceles, donde su simetría puede ser un factor a tener en consideración. Por otro lado, las construcciones auxiliares pueden dar pautas para vislumbrar la solución.

IMPORTANTE: Una vez concluido el proceso de solución de una (o varias) situaciones, es muy relevante la <u>reflexión</u> <u>sobre</u> <u>su</u> <u>quehace</u>r en cada problema, la importancia de conocer una serie de Hechos geométricos, la destrezas en establecer las relaciones, la importancia de las relaciones preliminares, entre otras. <u>No</u> <u>dejando</u> <u>de</u> <u>meditar</u> sobre la posible generalización del procedimiento, de los errores cometidos en su quehacer, sobre ¿en qué otro ámbito piensa que pueda aplicar el procedimiento?, ¿ bajo qué condiciones?.

Hasta aquí la síntesis del tercer momento de esta estrategia.

CONCLUSIONES:

Poseer un modo de actuar conciente y que funcione en situaciones “novedosas”, más allá de las exigencias y metas ya alcanzadas, le brinda al alumno una seguridad y un poder que lo hacen avanzar en su crecimiento y desarrollo.

Al tener que elaborar por si mismo, los componentes que le pueden poner en el camino de la solución el estudiante tiene una participación protagónica y consciente en su actuación. Las vivencias experimentadas pueden y deben ser socializadas en el grupo, contribuyendo al fortalecimiento del aprendizaje desarrollador.

Por último, insistir en que:

Para el estudiante: la conciencia de sus estrategias y del uso de estas, pasa a ser un componente esencial en la mejora de su desempeño al querer resolver ejercicios y problemas geométricos.

Para el profesor: Insistir en que “La forma en que se enfrenta la clase tiene un componente personal, y puede que lo que funcione con un docente con otro no ”. Por eso recomendamos analizar la estrategia presentada y si les encaja en sus estilos de enseñar pues adáptenla, mejórenla, así contribuyen a su perfeccionamiento

BIBLIOGRAFÍA:

ALONSO, C.; GALLEGOS, D. J.; MONEY, P. (1999). “Los Estilos de Aprendizaje. Procedimientos de diagnostico y mejora”. Bilbao: Ed. Mensajero.

BALLESTER, S. & SANTANA, H. & Otros.. (2001) “Metodología de la Enseñanza de al Matemática”, TOMO I y II. Ed. Pueblo y Educación. La Habana.

CASTELLANOS. D. (2001) “Hacia una concepción del aprendizaje desarrollador”. Centro de Estudios Educacionales, ISP “EJV”, La Habana.

(2002)” Para Promover un Aprendizaje Desarrollador”. Colección Proyectos. Centro de Estudios Educacionales, ISP “EJV”, La Habana

GADNER, H. (2006) “El desempeño, la evaluación y su relación con la calidad de la Educación”. Tele Conferencia. 1er Seminario Internacional “Evaluación de la Educación”. Colombia.

GARBIN, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Relime Vol. 8, Núm. 2, pp. 169-193.

JIMENEZ, C. (2000)”La metacognición y su implicación para los procesos de resolución de problemas matemáticos en alumnos del nivel medio superior”. Tesis de Maestría. ISP “EJV”. La Habana. Cuba

LÓPEZ, J.; CAMPISTROUS, L.; RIZO, C. (2004) “Las “situaciones de aprendizaje” en la didáctica de la matemática en la escuela media”. Segundo Congreso de Aplicaciones Tecnológicas en la Didáctica de las Ciencias y Matemáticas. INTEC. Republica Dominicana.

LIIVINA, M.; CASTELLANOS, B.; CASTELLANOS, D. y SÁNCHEZ, M. (2001): “Los proyectos educativos: una estrategia para transformar la escuela”. Centro de Estudios Educacionales, UCP “EJV”, La Habana

MOLINA, J. (2007) “Concepciones de la Transformación lineal en el contexto Geométrico”. Rev. Latinoamericana de Matemática Educativa. Méjico

POZO, J.; (1998) “Aprendices y Maestros. La nueva cultura del aprendizaje”. Alianza Editorial, Madrid.

RON, J.; (2007) “Una estrategia didáctica para el proceso de enseñanza aprendizaje de la Resolución de Problemas en las clases de Matemática en la Educación de Secundaria Básica”. Tesis Doctoral. UCP “EJV”, La Habana.