Tema: El principio de inducción y su aplicación a problemas de olimpiadas.

Autor: Eduardo Miguel Pérez Almarales.

Resumen:
En el presente artículo se muestra la utilidad de un método de mucha aplicación en la resolución de problemas de olimpiadas, se proponen problemas de olimpiadas realizadas en diferentes países, con sus respectivas soluciones. Los problemas que se proponen responden a los temas fundamentales que se abordan en las olimpiadas de conocimientos y habilidades: Matemática Discreta, Teoría de Números, Álgebra y Geometría.

Desarrollo

Principio de inducción: Sea $P(n)$ una propiedad de los números naturales. Una forma de probar que $P(n)$ es verdadero para todo n a partir de un n_0 es:

1. Demostrar el inicio de inducción, es decir que $P(n_0)$ es verdadera. Esta en ocasiones se denomina base de inducción.
2. Suponer que para cierto valor $n = k$, $P(k)$ es verdadera, esta se llama hipótesis de la inducción.
3. Demostrar utilizando lo anterior que la proposición es cierta para un valor $n = k + 1$, es decir que $P(k + 1)$ es verdadera. Esto se denomina paso inductivo.

Una vez demostrado el paso 3 se cumple la siguiente cadena de implicaciones:

$P(n_0)$ es verdadera $\Longrightarrow P(n_0 + 1)$ es verdadera $\Longrightarrow P(n_0 + 2)$ es verdadera $\Longrightarrow$ $P(n_0 + 3)$ es verdadera $\Longrightarrow \cdots$, de modo que $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$.

Generalmente los estudiantes principiantes en la utilización del principio de inducción cometen errores como los siguientes:

1. Probar algunos casos particulares y asegurar que se cumple para todos los valores enteros positivos.

Como por ejemplo se dan cuenta que en la desigualdad $n^2 - 3n - 1 < 0$ es verdadera para $n = 1, n = 2, n = 3$, con esto pueden suponer que se cumple para todos los valores enteros positivos. Sin embargo para $n = 4$, se cumple que:

$4^2 - 3 \cdot 4 - 1 = 3 > 0$, que por supuesto no cumple la desigualdad.

En la historia han existido otros ejemplos que se cumplen para más valores iniciales, sin embargo no se cumple para todos los enteros positivos.

Por ejemplo si se quiere demostrar la validez de la proposición: para todo número entero positivo n, $n^2 - n + 41$ es un número primo.

Aquí podemos comprobar que se cumple para los primeros 40 números enteros positivos, sin embargo para $n = 41$, el planteamiento falla, pues: $41^2 - 41 + 41 = 41^2$.

2. Demostrar por inducción sin garantizar el inicio o caso base.

El estudiante puede tratar de demostrar que todo número entero positivo es igual que su sucesor, esto es fácil de demostrar utilizando parte de la inducción, pero claramente es falso, pues se puede demostrar pero sin analizar el inicio de la inducción, veamos:

Hipótesis: $n = k, k = k + 1$

Tesis: $n = k + 1, k + 1 = k + 2$

Demostración:

Como por hipótesis $k = k + 1$, podemos sumar 1 a cada miembro y obtenemos $k + 1 = k + 2$, entonces se cumple la tesis y por tanto se cumple para todo entero positivo.

Algunos ejemplos sencillos de aplicación:

Ejemplo 1: Demuestra que, para todo entero positivo n, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Es conocido que esta es la fórmula de Gauss, y según cuenta la historia el maestro de un colegio alemán, castigó a todos los niños a sumar los 100 primeros números naturales para tenerlos entretenidos y callados un buen rato. Carl Friedrich Gauss obtuvo la respuesta casi de inmediato: 1 + 2 + 3 + … + 99 + 100 = 5050. Gauss, el niño prodigio, se dio cuenta de que 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, etc., todos suman 101, y que hay 50 de estos pares, resultando 50 × 101 = 5050. Esto dio lugar a la fórmula que se demuestra a continuación.

<u>Solución</u>:

Para n=1, $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$, cumpliéndose el inicio de la inducción.

Hipótesis de inducción: supongamos que la proposición es verdadera para $n = k$.

$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Demostremos utilizando la hipótesis inductiva que la proposición también es verdadera para $n = k + 1$

Debemos demostrar que:

$1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Entonces:

$1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

De modo que la relación es válida también para $n = k + 1$, entonces por el principio de inducción la relación es válida para todo número natural $n \geq 1$.

Ejemplo 2: Demuestra que para todo número natural n, $M_n = n(n^2 - 1)(3n + 2)$ es múltiplo de 24. (En Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro)

<u>Solución</u>:

Inicio: $n = 0$, entonces $M_0 = 0$, que es múltiplo de 24.

Hipótesis inductiva: $n = k$, entonces $M_k = k(k^2 - 1)(3k + 2)$ es múltiplo de 24.

Debemos demostrar ahora que la propiedad se cumple para $n = k + 1$, es decir que $M_{k+1} = (k + 1)((k + 1)^2 - 1)(3(k + 1) + 2)$ es un múltiplo de 24.

Determinemos la diferencia

$$M_{k+1}-M_k=(k+1)((k+1)^2-1)(3(k+1)+2)-k(k^2-1)(3k+2)=$$
$$k(k+1)[(k+2)(3k+5)-(k-1)(3k+2)]=12k(k+1)^2$$

Aquí como $k(k+1)$ es par entonces el resultado es múltiplo de 24, por tanto: $M_{k+1}=M_k+12k(k+1)^2$ también es divisible por 24 como se quería demostrar.

Segundo principio de inducción (Principio de inducción fuerte): La variación con respecto al anterior es que la hipótesis inductiva no se considera solo con el elemento de orden k, sino que se considera que la proposición es verdadera para todo número natural k tal que $n_0 \leq k \leq n$ y con esto se prueba que es verdadera para el elemento siguiente $P(n+1)$.

Ejemplo 3: Una sucesión de Fibonacci F_n es una sucesión definida recursivamente por

$F_0=0, F_1=1\ y\ F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ para $n \geq 2$.

Demuestra que $F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ donde $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ son las raíces de $x^2=x+1$, que es el polinomio característico de esta sucesión recurrente.

(En Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro)

<u>Solución</u>:

Inicio $F_0=\frac{\alpha^0-\beta^0}{\alpha-\beta}=0$ y $F_1=\frac{\alpha^1-\beta^1}{\alpha-\beta}=1$.

Hipótesis de inducción: Supongamos que el planteamiento es verdadero para n=k, $F_k=\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}$ y demostremos que se cumple para n=k+1, es decir que $F_{k+1}=\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\alpha-\beta}$.

Sanemos que por definición:

$$F_{k+1}=F_k+F_{k-1}=\frac{\alpha^k-\beta^k}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha^n+\alpha^{n-1})-(\beta^n+\beta^{n-1})}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

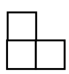
Pues $\alpha^2 = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha^{n+1} = \alpha^n + \alpha^{n-1}$ y de manera análoga $\beta^{n+1} = \beta^n + \beta^{n-1}$

En este caso puede observarse que como en el paso inductivo se utilizan dos términos de la sucesión es necesario demostrar el inicio para los dos primeros valores.

El principio de inducción es muy utilizado en la resolución de problemas como veremos a continuación, con algunas aplicaciones a las ramas fundamentales de la Matemática en las olimpiadas de conocimientos (Matemática Discreta, Teoría de Números, Álgebra y Geometría).

Problemas:

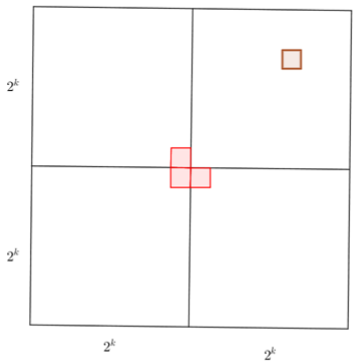
1. Sea n un entero positivo. Un cuadrado de un tablero $2^n \times 2^n$ es quitado. Prueba que el tablero restante puede ser cubierto por piezas como las que se muestran en la figura:



(En www.artofproblemsolving.com)

Solución:

Probemos el resultado utilizando inducción. Para $n = 1$ el resultado es trivial, pues cuando quitamos un cuadrado unitario de un tablero de 2×2 quedaría una pieza como la de la figura. Asumamos ahora que el resultado se verifica para algún entero positivo $n = k$, esto significa que para cada tablero de $2^k \times 2^k$ con un cuadrado unitario borrado puede ser cubierto por piezas como las dadas. Consideremos ahora un tablero de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ con un cuadrado unitario borrado. Utilicemos ahora la hipótesis de inducción, primeramente dividimos el tablero de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ en 4 tableros de $2^k \times 2^k$, donde en uno de ellos está el espacio del cuadrado unitario que fue borrado y por la hipótesis de inducción este se puede cubrir con piezas como las de la figura. Ahora necesitamos demostrar que el resto del tablero se puede cubrir con piezas como la dada. Para ello es suficiente notar que si le quitamos a cada uno de los tableros el cuadradito unitario que queda hacia el centro del tablero de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ estos tres cuadraditos pueden ser cubiertos por una pieza como la dada y por hipótesis de inducción las restantes casillas de cada uno de los tres tableros de $2^k \times 2^k$ también pueden ser cubiertas. (Ver la figura)



2. Cada carretera en Sikinia es de un solo sentido. Cada par de ciudades es conectada por exactamente una carretera directa. Demuestra que existe una ciudad a la cual se puede llegar desde cada otra ciudad directamente o vía cuando más otra ciudad. (En Problem-Solving Strategies)

<u>Solución</u>:

El planteamiento es obvio para dos y tres ciudades. Suponga que es verdadero para n ciudades. Una ciudad que satisface la condición del problema será llamada H-ciudad. Para n ciudades seleccionadas arbitrariamente sea A una H-ciudad. Las otras $n - 1$ ciudades puede ser particionada en dos conjuntos: el conjunto D de ciudades con carreteras directas hacia A y N el conjunto de ciudades sin carreteras directas hacia A. Entonces de cada N-ciudad se puede llegar a A vía alguna D-ciudad. Adicionemos otra ciudad P a las n ciudades. Existen dos casos a considerar:

(1) Existe una carretera directa desde P hasta A o a una D-ciudad. Entonces A es también una H-ciudad para las $(n + 1)$ ciudades.

(2) Desde A y desde cada ciudad en D existe una carretera directa a P. Existe también una carretera directa desde cada N-ciudad a alguna D-ciudad. Entonces P es una H-ciudad.

3. n circunferencias son dadas en el plano. Ellas dividen al plano en partes. Demuestra que se puede colorear el plano con dos colores, tal que ninguna parte con una línea borde común son coloreados del mismo modo. (En Problem-Solving Strategies)

<u>Solución</u>:

El planteamiento es obvio para $n = 1$. El interior es coloreado de blanco y el exterior de negro. Supongamos que el planteamiento es verdadero para n circunferencias. Ahora tomemos $n + 1$ circunferencias. Ignoremos una de las circunferencias, las restantes circunferencias dividen el plano en partes que cumplen las condiciones del problema por la hipótesis de inducción. Ahora adicionamos la $(n + 1)$- ésima circunferencia y realizamos la siguiente recoloración. Las partes exteriores a esa circunferencia mantienen su color, mientras la parte interior de esta circunferencia cambia, las partes negras se transforman en blancas y viceversa, la nueva coloración obviamente cumple con las condiciones del problema. Por la recoloración que se desarrolló dos regiones vecinas a través de esa circunferencia tendrán colores diferentes, mientras dos regiones vecinas del mismo lado de la circunferencia tendrán colores diferentes por la hipótesis de inducción.

4. (USAMO 2003) Prueba que para todo entero positivo n existe un número de n dígitos impares divisible por 5^{n}. (En 104 Number Theory).

Solución:

Procedemos por inducción. La propiedad es claramente cierta para $n = 1$. Asumamos que $N = \overline{a_1 a_2 \cdots a_n}$ es divisible por 5^n y que tiene solo dígitos impares. Considere los números:

$N_1 = \overline{1a_1 a_2 \cdots a_n} = 1 \cdot 10^n + 5^n M = 5^n(1 \cdot 2^n + M)$,

$N_2 = \overline{3a_1 a_2 \cdots a_n} = 3 \cdot 10^n + 5^n M = 5^n(3 \cdot 2^n + M)$

$N_3 = \overline{5a_1 a_2 \cdots a_n} = 5 \cdot 10^n + 5^n M = 5^n(5 \cdot 2^n + M)$

$N_4 = \overline{7a_1 a_2 \cdots a_n} = 7 \cdot 10^n + 5^n M = 5^n(7 \cdot 2^n + M)$

$N_5 = \overline{9a_1 a_2 \cdots a_n} = 9 \cdot 10^n + 5^n M = 5^n(9 \cdot 2^n + M)$

Los números $1 \cdot 2^n + M$, $3 \cdot 2^n + M$, $5 \cdot 2^n + M$, $7 \cdot 2^n + M$, $9 \cdot 2^n + M$ dejan distintos restos cuando se dividen por 5. De otro modo la diferencia de algunos dos de ellos sería un múltiplo de 5, lo cual es imposible porque 2^n no es un múltiplo de 5, ni tampoco es la diferencia de cada dos de los números $1,3,5,7,9$. Sigue que uno de los números N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 es divisible por $5^n \cdot 5$ y la inducción es completada.

5. Prueba que para todo entero positivo n se cumple que:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

(En Putnam and Beyond)

Solución:

El caso $n = 1$ es $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, que es verdadero. Ahora la hipótesis de inducción sería:

$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$

Debemos probar que:

$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$

Usando la hipótesis de inducción podemos escribir esto como:

$\frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$

Lo cual se reduce obviamente a $\frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+2}$. Lo cual completa la inducción.

6. (Arabia Saudita 2012) Defina la sucesión $x_1, x_2, \cdots$ por $x_1 = \frac{1}{6}$ y $x_{n+1} = \frac{n+1}{n+3}\left(x_n + \frac{1}{2}\right)$ para cada $n \geq 1$. Determina x_{2011}.

Solución:

Tenemos $x_2 = \frac{2}{4}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{6}$, $x_3 = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{6}$, probaremos por inducción en n que $x_n = \frac{n}{6}$ para todo $n \geq 1$. El inicio ya ha sido probado, supongamos que $x_k = \frac{k}{6}$ y demostremos que se cumple $x_{k+1} = \frac{k+1}{6}$.

$x_{k+1} = \frac{k+1}{k+3}\left(x_k + \frac{1}{2}\right) = \frac{k+1}{k+3}\left(\frac{k}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{k+1}{k+3} \cdot \frac{k+3}{6} = \frac{k+1}{6}$ y ha sido demostrado. Por tanto:

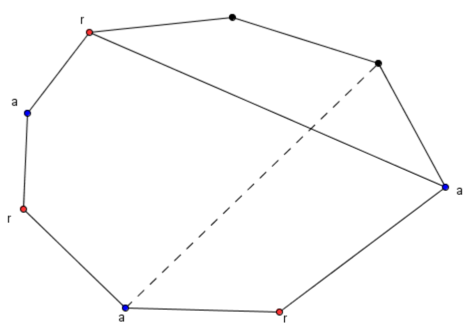
$x_{2011} = \frac{2011}{6}$

7. Los vértices de un polígono convexo son coloreados de al menos tres colores tal que ninguna pareja de vértices consecutivos tienen el mismo color. Prueba que se puede descomponer el polígono en triángulos por diagonales que no se intersequen y cuyos puntos extremos tengan diferentes colores. (En Putnam and Beyond)

Solución:

La propiedad es obviamente verdadera para el triángulo pues en este caso no hay necesidad de descomponer el polígono convexo. Este será nuestro inicio de inducción. Asumamos que la proposición es verdadera para cada coloración de un k-ágono, para todo $k < n$ y probemos que es verdadera para una coloración arbitraria de un n-ágono. Como al menos tres colores son usados existe una diagonal cuyos extremos tienen diferente color, sean rojo (r) y azul (a). Si en ambos lados de la diagonal aparece un tercer color, entonces podemos aplicar la hipótesis de inducción a los dos polígonos y resolver el problema.

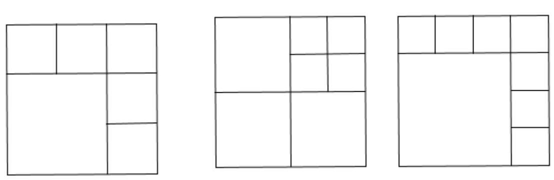
Si este no es el caso en uno de los lados existirá un polígono con un número par de lados y con vértices coloreados en orden cíclico $rara \ldots ra$. Seleccionando un punto azul entre ellos que no sea un extremo de la diagonal seleccionada inicialmente y uniéndolo a un vértice coloreado del tercer color (ver figura). La nueva diagonal divide el polígono en dos polígonos que satisfacen la propiedad del planteamiento y tienen menos lados. La hipótesis de inducción puede ser aplicada resolviendo el problema.



8. Prueba que todo cuadrado puede ser dividido en n cuadrados, para todo $n \geq 6$. (En Mathematical Olympiad Challenges)

<u>Solución</u>:

Probemos por inducción en n. Los casos para $n = 6, 7 \; y \; 8$ se muestran en la figura:



La solución ahora sigue de un argumento inductivo, como la propiedad se considera verdadera para cierto k, entonces se puede demostrar que es verdadera para k+3, dividiendo uno de los cuadrados de la figura k en 4.

Bibliografía

1. Alberro, A., Bulajich, A., Rubio, C. y Ruiz, F. (2010) Revista de la Olimpiada mexicana de Matemáticas.
2. Andreescu, T. and Gelca, R. (2009). Mathematical Olympiad Challenges. Boston: Birkhäuser.
3. Andreescu, T., Andrica, D. and Feng, Z. (2007). 104 Number Theory. Problems From the Training of the USA IMO Team. Boston: Birkhäuser.
4. Andreescu, T. and Dospinescu, G. (s.f). Good for IMO. En formato digital.
5. Andreescu, T., Feng, Z. and Lee, G. (Eds.) (2001). Mathematical Olympiads 2000–2001. Problems and Solutions From Around the World. USA: The Mathematical Association of America.
6. Andreescu, T. and Feng, Z. (Eds.) (2000). Mathematical Olympiads 1999–2000. Problems and Solutions From Around the World. USA: The Mathematical Association of America.
7. Ba Can, V. and Pohoata, C. (2008). Old and New Inequalities. En formato digital.
8. Bin, X. and Yee, L. (Eds.) (2007). Mathematical Olympiad in China. Problems and Solutions. China: East China Normal University Press and World Scientific Publishing.
9. Boju, V. and Funar, L. (2007). The Math Problems Notebook. Boston: Birkhäuser.
10. Bradley. Ch. Challenges in Geometry for Mathematical Olympians. Past and Present. London: Oxford University Press.
11. Brochero, F., Moreira, C, Saldanha, N. y Tenga, E. (2013). Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. Rio de Janeiro: IMPA.
12. Brown, P., Di Pasquale, A. and McAvaney, K. (2012). Mathematics Contests. The Australian Scene. Canberra: AMT Publishing.
13. Chau, L. and Khoi, L. (2010). Selected Problems of the Vietnamese Mathematical Olympiad (1962-2009). Singapore: World Scientific Publishing.

14. Dorrie, H. (1965). 100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their History and Solution. New York: Dover Publications.
15. Djukić, D., Janković, V., Matić, I. and Petrović, N. (2011). The IMO Compendium. New York: Springer.
16. Engel, A. (1998). Problem-Solving Strategies. New York: Springer-Verlag
17. Feng, Z. and Sun, Y. (Eds.)(2013). USA and International Mathematical Olympiads, 2012-2013.
18. Frimu, A. et al. (2009). Problems in Elementary Number Theory. En formato digital.
19. Gelca, R and Andreescu, T. (2007). Putnam and Beyond. New York: Springer.
20. Hardy, G. and Wright, E. (1975). An Introduction to the Theory of Numbers. London: Oxford University Press.
21. Lee, H., Lovering, T., and Pohoata, C. (2008). Infinity. En formato digital.
22. Lovász, L. and Vesztergombi, K. (1979). Discrete Mathematics. New York: Springer.
23. Poonen, B. (s.f.). Inequalities. En formato digital.
24. Prasolov, V. (s.f.). Problems in Plane and Solid Geometry. En formato digital.
25. Soifer, A. (2009). Mathematics as Problem Solving. USA: springer.
26. Worldwide Online Olympiad Training. www.artofproblemsolving.com. Sponsored by D. E. Shaw group and Two Sigma Investments.