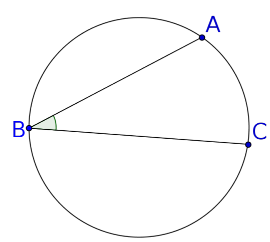
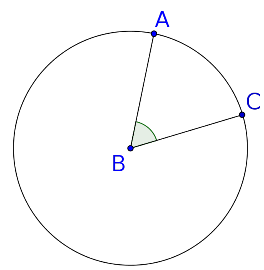
Ángulos en el Círculo

Luis F. Cáceres Ph.D
UPR-Mayagüez

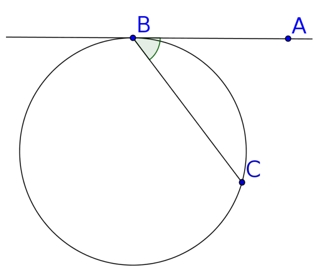
Existen algunos ángulos importantes, relacionados con el círculo. Los **ángulos inscritos** tienen su vértice en la circunferencia y los lados son cuerdas o diámetros. Los **ángulos centrales** tienen el vértice en el centro del círculo y los lados son radios. Los **ángulos semiinscritos** tienen el vértice en el círculo, un lado es una tangente al círculo, y el otro una secante. Las tangentes son rectas que tocan al círculo en un solo punto y son perpendiculares al radio que pasa por dicho punto y las secantes son rectas que tocan al círculo en dos puntos. Los **ángulos circunscritos** tienen el vértice en el punto de corte de dos tangentes al círculo y tienen como lados a las dos tangentes. Las siguientes figuras ilustran estos ángulos.



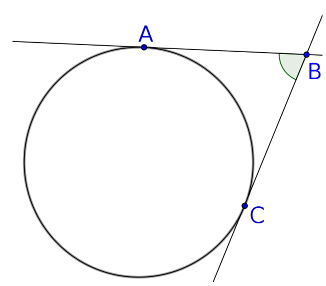
(a) $\sphericalangle$ ABC es inscrito



(b) $\sphericalangle$ ABC es central

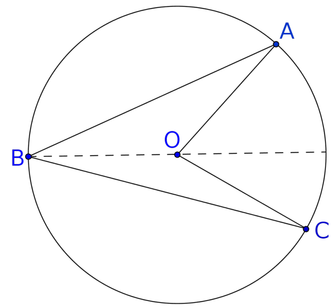


(c) $\sphericalangle$ ABC es semiinscrito

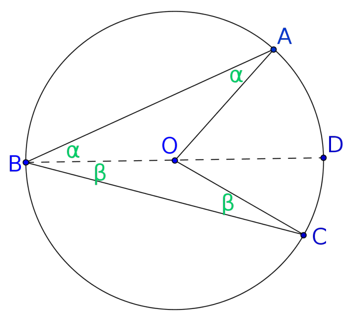


(d) $\sphericalangle$ ABC es circunscrito

En la siguiente figura se tiene un ángulo inscrito ABC y un ángulo central AOC, donde ambos abren el mismo arco $\widehat{AC}$.

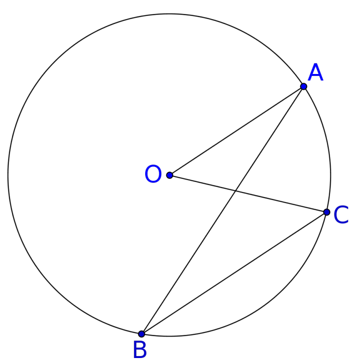


Note que si trazamos el diámetro BD que pasa por O y B se forman dos triángulos isósceles $\triangle OAB$ y $\triangle OBC$.



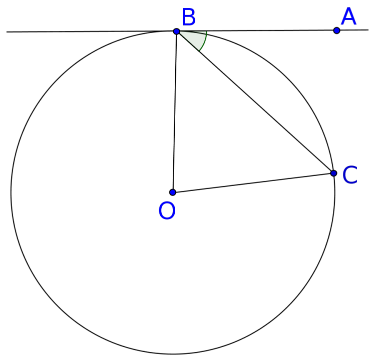
Por lo tanto se pueden marcar los ángulos α y β como se muestra en la figura. Como $\sphericalangle AOD$ es exterior al $\triangle OAB$, entonces su medida es 2α y similarmente el $\sphericalangle DOC$ es 2β. De esto concluimos que $\sphericalangle AOC = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$.

Por lo tanto el ángulo central $\sphericalangle AOC$ es el doble del ángulo inscrito $\sphericalangle ABC$. Es fácil demostrar, y lo dejamos como ejercicio para el lector, que en la situacíon del dibujo siguiente



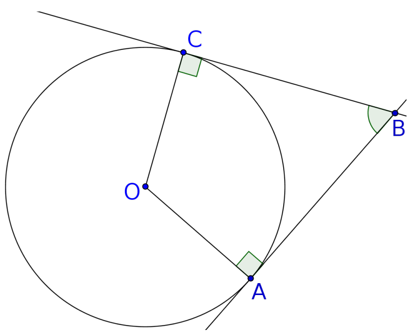
en donde el ángulo inscrito ABC y el ángulo central AOC abren el mismo arco, también se cumple que el central es el doble del inscrito.

Esta relación es la mas importante entre ángulos centrales y ángulos inscritos que abren el mismo arco. Además, como dos ángulos inscritos que abren el mismo arco tienen un mismo ángulo central que abre dicho arco, entonces es claro que los dos ángulos inscritos miden lo mismo.



En la siguiente figura el ángulo semiinscrito $\sphericalangle ABC = \alpha$ abre el mismo arco que el ángulo central BOC. Como BA es perpendicular a BO, entonces $\sphericalangle CBO = 90^o - \alpha$. Pero el $\triangle OBC$ es isósceles. Por lo tanto $\sphericalangle OCB = 90^o - \alpha$. Por lo tanto el ángulo central $\sphericalangle BOC = 180 - (90 - \alpha) - (90 - \alpha) = 2\alpha$.

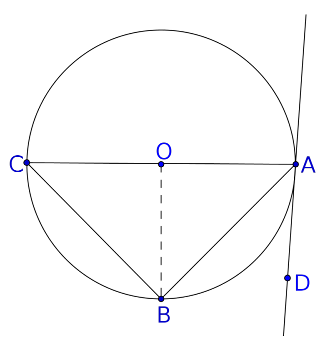
Esto demuestra que si un ángulo semiinscrito abre el mismo arco que un ángulo central, entonces el ángulo central es el doble del semiinscrito.
En la siguiente figura se muestra un ángulo circunscrito CBA.



Como la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero $ABCO$ es 360^o y $\sphericalangle BCO = \sphericalangle OAB = 90^o$. Entonces $\sphericalangle ABC + \sphericalangle COA = 180^o$.

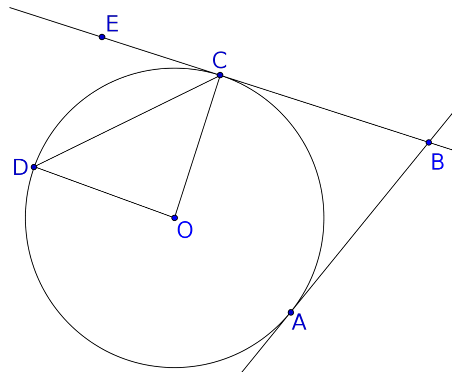
Por lo tanto el ángulo circunscrito $\sphericalangle ABC$ es el suplemento del ángulo central $\sphericalangle COA$.

Ejemplo. En la figura el $\sphericalangle BOC = 106^o$. Por lo tanto el ángulo central $\sphericalangle AOB = 180^o - 106^o = 74^o$. Como $\sphericalangle ACB$ es inscrito y abre el mismo arco que $\sphericalangle AOB$, entonces $\sphericalangle ACB = \frac{74^o}{2} = 37^o$.



Por otro lado el ángulo semiinscrito $\sphericalangle DAB$ abre el mismo arco que el central AOB, luego $\sphericalangle DAB = 37^o$.

Ejemplo. En la figura, el ángulo circunscrito $\sphericalangle ABC = 70^o$ y el $\sphericalangle AOD = 130^o$.

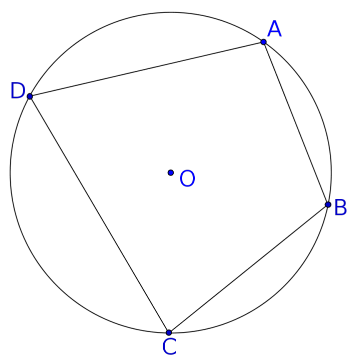


Por lo tanto el ángulo central $\sphericalangle COA = 180^o - 70^o = 110^o$. Además

$$\begin{aligned} \sphericalangle DOC &= 360^o - \sphericalangle COA - \sphericalangle AOD \\ &= 360^o - 110 - 130 = 120^o. \end{aligned}$$

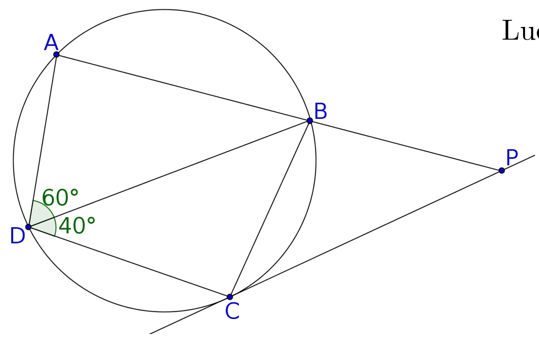
Entonces el ángulo semiinscrito $\sphericalangle DCE = \frac{120^o}{2} = 60^o$.

Un cuadrilátero que tiene sus cuatro vértices en una circunferencia se llama **cíclico**. En la figura, $ABCD$ es cíclico y el $\sphericalangle ADC = \frac{1}{2}\sphericalangle AOC$. Similarmente el $\sphericalangle CBA = \frac{1}{2}\sphericalangle COA$.



Por otro lado, $\sphericalangle COA + \sphericalangle AOC = 360^o$, entonces $2\sphericalangle CBA + 2\sphericalangle ADC = 360^o$. Luego $\sphericalangle CBA + \sphericalangle ADC = 180^o$. Esto demuestra que si un cuadrilátero es cíclico, entonces sus ángulos opuestos son suplementarios. De hecho, se puede demostrar también que si un cuadrilátero tiene dos ángulos opuestos suplementarios, entonces es cíclico.

Ejemplo. En la figura, $ABCD$ es cíclico y el $\sphericalangle ADB = 60^o$ y el $\sphericalangle BDC = 40^o$. Entonces el $\sphericalangle ADC = 100^o$ y $\sphericalangle ADC + \sphericalangle CBA = 180^o$. Pero $\sphericalangle CBA + \sphericalangle PBC = 180^o$ pues estos ángulos forman un par lineal. Entonces $\sphericalangle PBC = \sphericalangle ADC = 100^o$. Además el ángulo inscrito $\sphericalangle BDC$ abre el mismo arco que el ángulo semiinscrito $\sphericalangle BCP$. Por lo tanto $\sphericalangle BCP = 40^o$.



Luego

$$
\begin{aligned}
\sphericalangle CPB &= 180^o - \sphericalangle BCP - \sphericalangle PBC \\
&= 180^o - 40^o - 100^o \\
&= 40^o.
\end{aligned}
$$