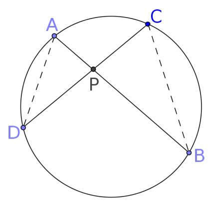
Potencia de un Punto

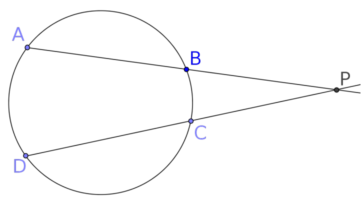
Luis F. Cáceres Ph.D
UPR-Mayagüez

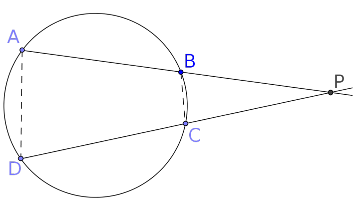
Propiedad 1. Las cuerdas AB y CD se cortan en P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.



Demostración. El $\sphericalangle PAC = \sphericalangle BCD$ pues abren el mismo arco y $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPD$ ya que son opuestos por el vértice. Entonces por AA, el $\triangle ADP \sim \triangle CBP$. Por lo tanto $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$, de donde $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

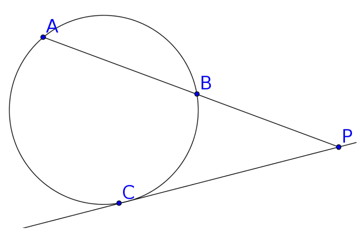
Propiedad 2. En la figura, las secantes se cortan en P. Entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

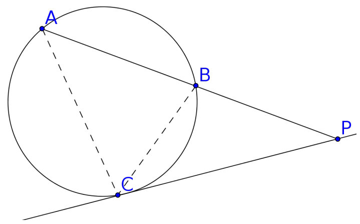




Demostración. El $\sphericalangle PBC = \sphericalangle ADC$ ya que $\sphericalangle ADC + \sphericalangle CBA = 180^o$ y $\sphericalangle PBC + \sphericalangle CBA = 180^o$. Entonces $\triangle PBC \sim \triangle PDA$ por AA. Por lo tanto $\frac{PC}{PA} = \frac{BC}{PD}$ de donde se obtiene el resultado.

Propiedad 3. En la figura la secante se corta con la tangente en P. Entonces $PA \cdot PB = PC^2$.



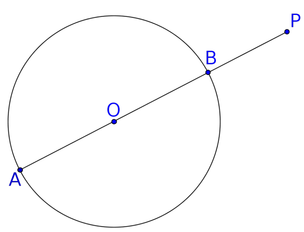


Demostración. El $\sphericalangle BAC = \sphericalangle PBC$ ya que uno es inscrito y el otro semiinscrito y ambos abren el mismo arco. Entonces $\triangle PAC \sim \triangle PCB \cdot AA$. Luego $\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB}$.

Nota: De las tres propiedades anteriores se deduce que si P es un punto en el plano y se tiene una circunferencia con centro O, entonces para cualquier linea que pase por P y corte a la circunferencia en A y B se cumple que $PA \cdot PB$ es constante, es decir que no depende de la linea.

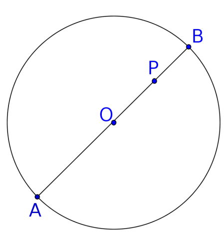
Definición. La potencia de un punto P con respecto una circunferencia con centro en O y radio r se define como $|PO^2 - r^2|$.

- Si P es exterior a la circunferencia, entonces



$$\begin{aligned} PO^2 - r^2 &= (PO + r)(PO - r) \\ &= PA \cdot PB \end{aligned}$$

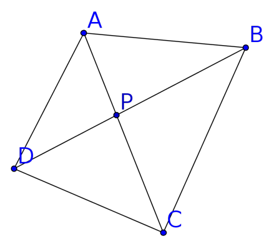
- Si P es interior a la circunferencia, entonces



$$\begin{aligned} r^2 - PO^2 &= (r + PO)(r - PO) \\ &= PA \cdot PB \end{aligned}$$

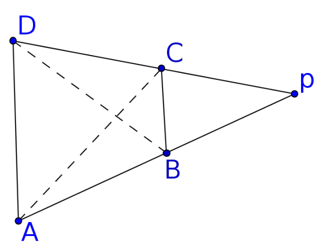
- Si P está sobre la circunferencia, la potencia es 0.

Propiedad 4. Si $ABCD$ es un cuadrilátero, tal que sus diagonales se intersecan en P, entonces $ABCD$ es cíclico si y solo si $PA \cdot PC = PB \cdot PD$.



Demostración. [$\Rightarrow$] Propiedad 1.
[$\Leftarrow$] como $\frac{PA}{PB} = \frac{PD}{PC}$ y $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$ entonces $\triangle PAB \sim \triangle PDC$ por LAL. Entonces $\sphericalangle PBA = \sphericalangle DCP$ y esto implica que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.

Propiedad 5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que sus lados opuestos se cortan en P. Entonces $ABCD$ es cíclico si y solo si $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

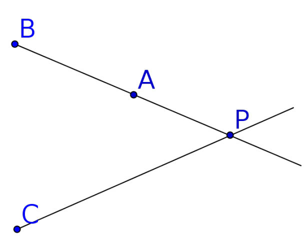


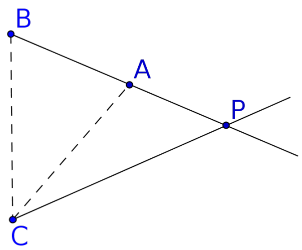
Demostración. [$\Rightarrow$] Propiedad 2.
[$\Leftarrow$] como $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, entonces $\triangle PCB \sim \triangle PAD$ por LAL. Por lo tanto $\sphericalangle PCB = \sphericalangle DAB$, entonces

$$\begin{aligned}\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD &= \sphericalangle DAB + (180^o - \sphericalangle PCB)\\ &= \sphericalangle DAB + (180^o - \sphericalangle DAB)\\ &= 180^o\end{aligned}$$

Esto implica que $ABCD$ es cíclico.

Propiedad 6. En la figura, supongamos que $PA \cdot PB = PC$. Entoces el círculo que pasa por A, B y C es tangente a PC.

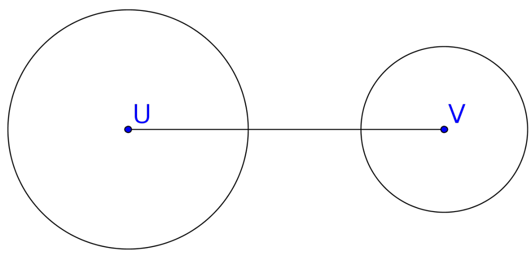




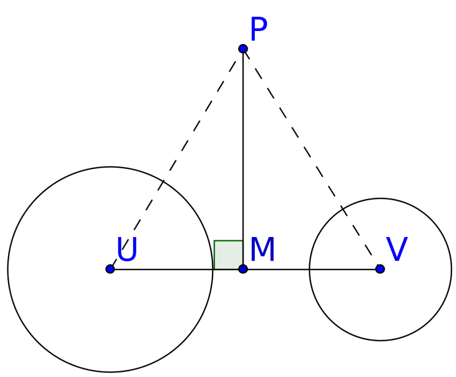
Demostración. Como $\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB}$, entonces por LAL, $\triangle PAC \sim \triangle PCB$. Por lo tanto $\sphericalangle PBC = \sphericalangle ACP$. Esto implica que $\sphericalangle ACP$ es semiinscrito en la circunferencia que pasa por A, B y C por lo tanto PC es tangente a dicha circunferencia.

Definición. El eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos cuyas potencias a las dos circunferencias son iguales.

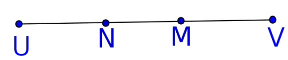
Consideremos inicialmente dos circunferencias no concéntricas cuyos centros son U, V y sus radios r y s respectivamente.



- Supongamos que P es un punto con la misma potencia a las dos circunferencias. Sea M en UV tal que $PM \perp UV$. Entonces $PU^2 - r^2 = PV^2 - s^2$. Luego $PU^2 - r^2 - MP^2 = PV^2 - s^2 - MP^2$. Por lo tanto $MU^2 - r^2 = MV^2 - s^2$. Entonces M está en el eje radical.



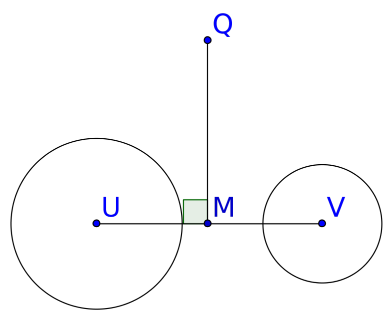
- De $MU^2 - r^2 = MV^2 - s^2$ se obtiene que $MU^2 - MV^2 = r^2 - s^2$. Luego $(MU - MV)(MU + MV) = r^2 - s^2$. Entonces $(MU - MV)UV = r^2 - s^2$. Por lo tanto



$MU - MV = \frac{r^2 - s^2}{UV}$ que es constante. Luego el punto M existe y además es único. Si N fuera otro punto de UV en el eje radical, entonces $NU^2 - r^2 = NV^2 - s^2$. Luego $(UM - NM)^2 - r^2 = (MV + NM)^2 - s^2$. Por lo tanto $UM^2 - 2UMNM + NM^2 - r^2 = MV^2 + 2MVNM + NM^2 - s^2$. De donde $-2UMNM = 2MVNM$. Entonces $NM(UV) = 0$. Luego $NM = 0$ y esto implica que $N = M$.

- Por lo tanto, si un punto tiene potencia igual con respecto a las dos circunferencias, entonces el punto está en una perpendicular a la recta que une los centros de los círculos.

- Por otro lado, si un punto está en la perpendicular de UV por M, entonces dicho

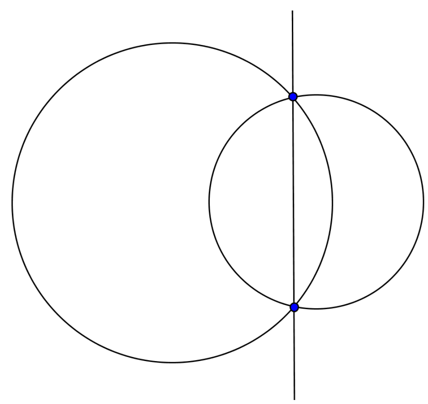


punto está en el eje radical. En efecto, sea Q en dicha perpendicular. Como $MU^2 - r^2 = MV^2 - s^2$, entonces $QM^2 + MU^2 - r^2 = QM^2 + MV^2 - s^2$. Por lo tanto $QU^2 - r^2 = QV^2 - s^2$. Esto implica que Q está en el eje radical.

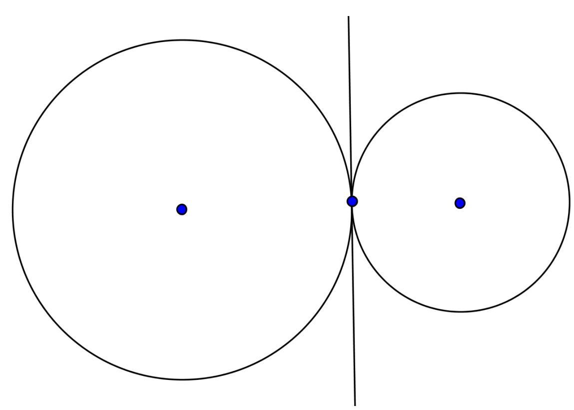
De todas estas observaciones se concluye la propiedad siguiente:

Propiedad 7. El eje radical de dos circunferencias no concéntricas es una línea perpendicular a la línea que une los centros de las circunferencias.

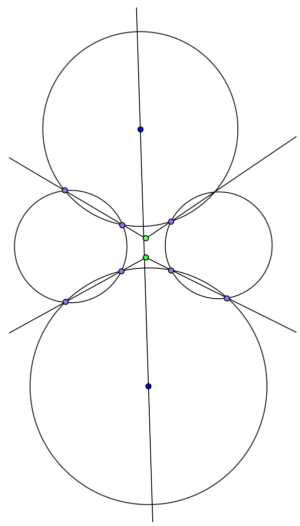
Propiedad 8. Si dos circunferencias son secantes, los puntos de corte tienen potencia 0 y por lo tanto están en el eje radical de las circunferencias. Entonces el eje radical es la recta que pasa por sus puntos de corte.



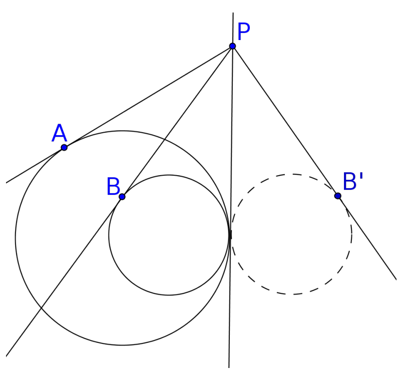
Propiedad 9. Si dos rectas son tangentes, entonces el punto de tangencia pertenece al eje radical y por la propiedad de perpendicularidad del eje radical. con respecto a la línea que une los centros se tiene que el eje radical es la tangente por el punto común.



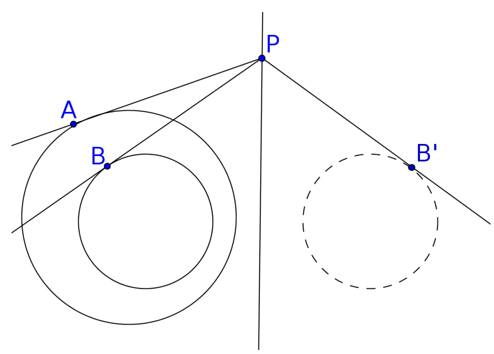
Propiedad 10. Si dos circunferencias no se cortan, se pueden trazar dos circunferencias secantes a ambas y unir los puntos de intersección de las cuerdas comunes. Por transitividad estos puntos comunes tiene la misma potencia con respecto a las dos circunferencias.



Propiedad 11. Los siguientes dibujos ilustran el eje radical en otras situaciones.



(a) $PA = PB = PB'$



(b) $PA = PB = PB'$

Ejercicios

1. Si desde un punto P del eje radical de dos circunferencias se trazan las tangentes a las circunferencias, las distancias desde P a los dos puntos de tangencia son iguales.

2. Los ejes radicales de tres circunferencias con centros no colineales tomadas por pares son concurrentes. El punto de concurrencia se llama **centro radical**.

3. Si dos circunferencias se intersecan, la cuerda en común biseca las tangentes en común a dicha circunferencia.

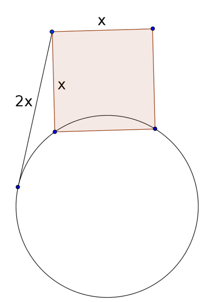
4. Sea ABC un triángulo tal que $\sphericalangle C = 90 + \frac{1}{2}\sphericalangle B$. Sea Z en AB tal que $BZ = BC$. El círculo que pasa por B, C y Z es tangente al lado AC en C.

5. Supóngase que AB y CD son dos cuerdas perpendiculares de un círculo y sea E el punto de intersección. Si $AE = 2$, $EB = 6$ y $ED = 3$, encontrar el diámetro del círculo.

6. Está dado un ángulo con vértice O y una circunferencia inscrita en él, la cual toca a sus lados en A y B. Por el punto A se traza una línea paralela a OB la cual interseca a la circunferencia en el punto C. El segmento OC interseca a la circunferencia en E. Las líneas AE y OB se intersecan en el punto K. Probar que $OK = KB$.

7. Una línea paralela al lado de BC de un triángulo ABC corta a AB en F y AC en E. Probar que las circunferencias que tienen como diámetros a BE y a CF se cortan en un punto que cae en la altura del $\triangle ABC$ dibujada desde el vértice A.

8. En la siguiente figura, desde un vértice del cuadrado está trazada una tangente, la cual tiene una longitud igual al doble del lado del cuadrado. Encontrar el radio de la circunferencia en función del lado del cuadrado.



9. Por un punto en el eje radical de dos circunferencias, se dibujan secantes a cada una de las dos circunferencias. Estas secantes determinan cuatro puntos sobre la circunferencias. Demostrar que estos puntos determinan un cuadrilátero cíclico.

10. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E, F respectivamente. AD corta a la circunferencia en un segundo punto Q. Demostrar que la recta EQ pasa por el punto medio de AF si y solo si $AC = BC$.