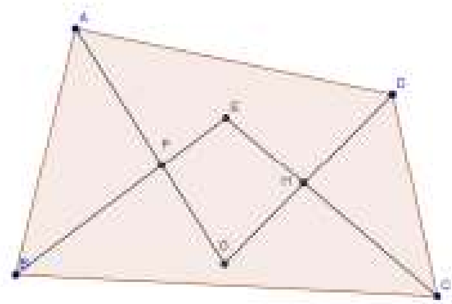
Cuadriláteros Cíclicos

Luis F.Cáceres Ph.D.
UPR-Mayagüez

1. Sean AD, BE y CF las alturas de un triángulo ABC y H su punto de intersección. Demuestra que los cuadriláteros AEHF, CEHD, BDHF, BCEF, ACDF y ABDE son cíclicos.

2. En la siguiente figura están trazadas las bisectrices de los ángulos interiores del cuadrilátero ABCD, las cuales se intersectan en los puntos E, F, G y H, como se muestra en la figura. Demuestra que el cuadrilátero EFGH es cíclico.



3. En un cuadrado ABCD, M es el punto medio de AB. Una línea perpendicular a MC por M intersecta AD en K. Demuestra que ∠BCM = ∠KCM.

4. Sea AL la bisectriz del ángulo A de un triángulo acutángulo ABC. Sean M y N puntos sobre los lados AB y AC respectivamente de manera que ∠MLA = ∠B y ∠NLA = ∠C. Demostrar que AMLN es un cuadrilátero cíclico.

5. Las circunferencias C1 y C2 se intersecan en los puntos A y B. Por el punto A se traza una recta que corta a las circunferencias C1 y C2 en los puntos C y D respectivamente. Por los puntos C y D se trazan tangentes a las circunferencias, las cuales se intersecan en el punto M. Demostrar que el cuadrilátero MCBD es cíclico.

6. Sea BC el diámetro de un semicírculo y sea A el punto medio del semicírculo. Sea M un punto sobre AC. Sean P y Q los pies de las perpendiculares desde A y C a la línea BM, respectivamente. Demostrar que BP=PQ+QC.

7. Sobre la tangente por B a una circunferencia de diámetro AB, se toman dos puntos C y D. Si AC corta a la circunferencia en F y AD corta a la circunferencia en E, demostrar que el cuadrilátero CDEF es cíclico.

8. Sea el triángulo ABC y sea D el pie de la altura desde A. Sean E y F sobre una línea que pasa por D de tal manera que AE es perpendicular a BE., AF es perpendicular a CF, E y F son diferentes de

D. Sean M y N los puntos medios de BC y EF, respectivamente. Demostrar que AN es perpendicular a NM.

9. Sea AB el diámetro de una semicircunferencia. Un punto M es marcado sobre la semicircunferencia y un punto K es marcado sobre AB. Una circunferencia con centro P pasa por A, M y K y otra circunferencia con centro Q pasa por M, K y B. Demostrar que M,K, P y Q son concíclicos.

10. Sea AB una cuerda de una circunferencia y P un punto sobre la circunferencia. Sea Q la proyección de P sobre AB y R y S las proyecciones de P sobre sobre las tangentes a la circunferencia en A y B respectivamente. Probar que PQ PQ=PR PS.

11. Sean A y B los puntos en común de dos circunferencias secantes. Una recta pasa por A e intersecta a las circunferencias en C y D. Sean P y Q las proyecciones de B sobre las tangentes a las dos circunferencias en C y D, respectivamente. Las tangentes se intersecan en T. probar que TCBD y TPQB son cíclicos.

12. Sea ABC un triángulo y sean L y N las intersecciones de la bisectriz del ángulo A con el lado BC y el circuncírculo de ABC respectivamente. Construimos la intersección M del circuncírculo de ABL con el segmento AC. Probar que los triángulos BMN y BMC tienen la misma área.

13. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A y altura AD. Se construyen los cuadrados BCX1X2, CAY1Y2, ABZ1Z2 hacia el exterior del triángulo. Sea AX1 intersección BY2 el punto U y sea AX2 intersección CZ1 el punto V. Probar que los cuadriláteros ABDU, ACDV, BX1UV son cíclicos.
14. Sea ABC un triángulo acutángulo escaleno cuyo ortocentro es H. M es el punto medio del segmento BC. N es el punto donde se intersecan el segmento AM y la circunferencia determinada por B, C y H. Demostrar que HN y AM son perpendiculares.

15. Dos círculos se intersecan en A y B. AC y AD son diámetros de los círculos. Probar que C,B y D son colineales.