SIMPOSIO IBEROAMERICANO 2014

San Pedro Sula, septiembre de 2014

ALGUNOS MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS NO CONVENCIONALES

Prof. Francisco Bellot Rosado

Real Sociedad Matemática Española

franciscobellot@gmail.com

Problema 1

En un tablero están situadas fichas, formando un rectángulo de dimensiones $m \times n$, $m \geq 2, n \geq 2$. El tablero es infinito, en todas direcciones. Sólo hay un tipo de movimiento permitido : una ficha salta sobre otra ficha situada en una casilla contigua, yendo a parar a una casilla que esté vacía, y se come la ficha sobre la que salta. Esto puede hacerse horizontal o verticalmente, pero no en diagonal.

¿Cuál es el menor número de fichas que puede quedar en el tablero?

(Olimpiada de la Comunidad de Estados Independientes 1992)

Solución

Podemos pensar en los casos en que m y n no son excesivamente grandes, siempre será más fácil que si empezamos con un rectángulo 1537×2000...

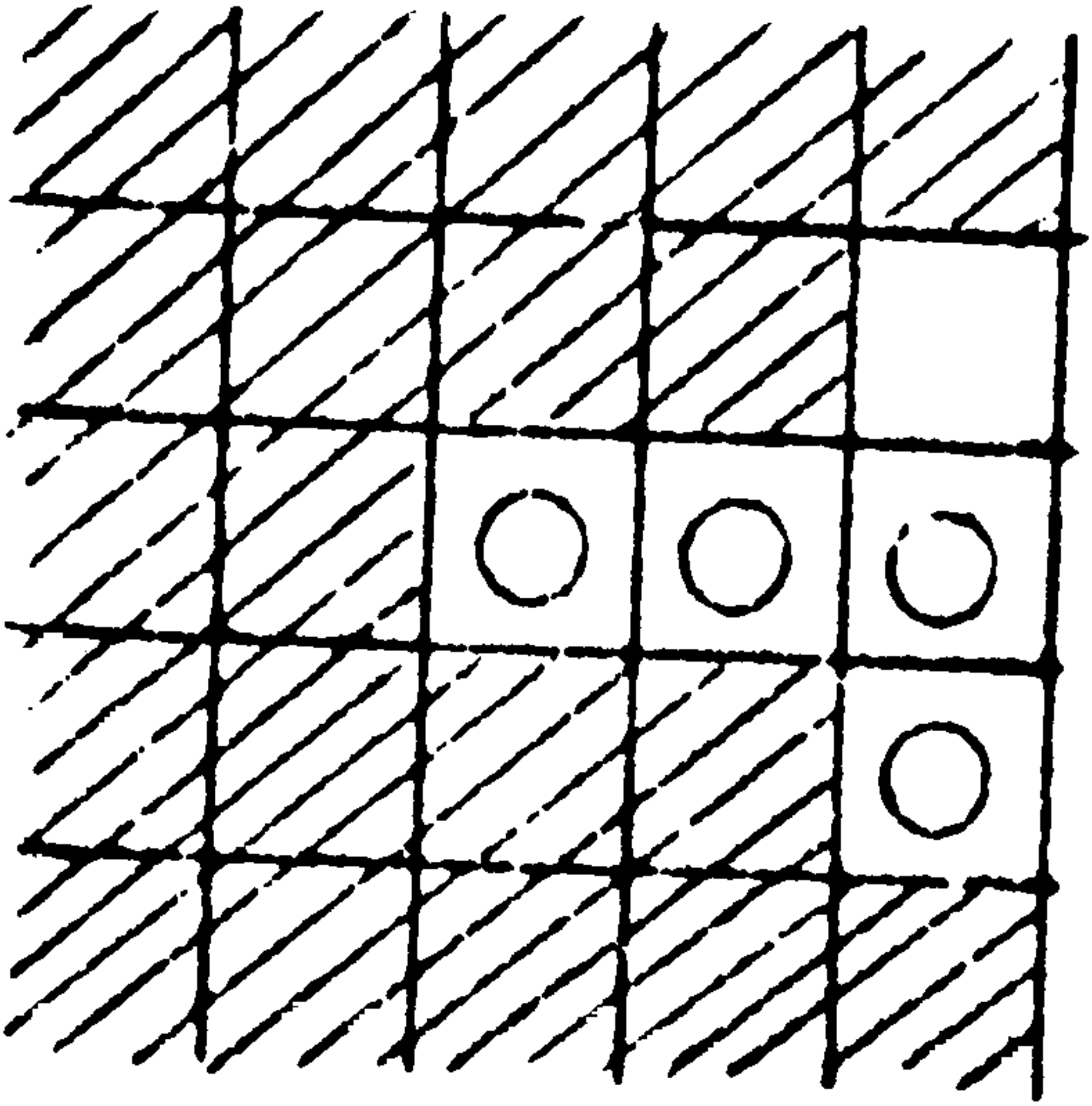
Si el rectángulo tiene dimensiones 2×1, el análisis termina en seguida: sólo queda 1 ficha en el tablero.

Si es 3×1, quedan 2 fichas, puesto que inicialmente sólo se puede mover la central, comiéndose una de las otras dos, y las que quedan después están demasiado separadas para que el juego continúe.

El caso 2×2 se reduce fácilmente al 2×1 (queda 1 ficha), y el 3×2 se reduce al 3×1: quedan 2 fichas.

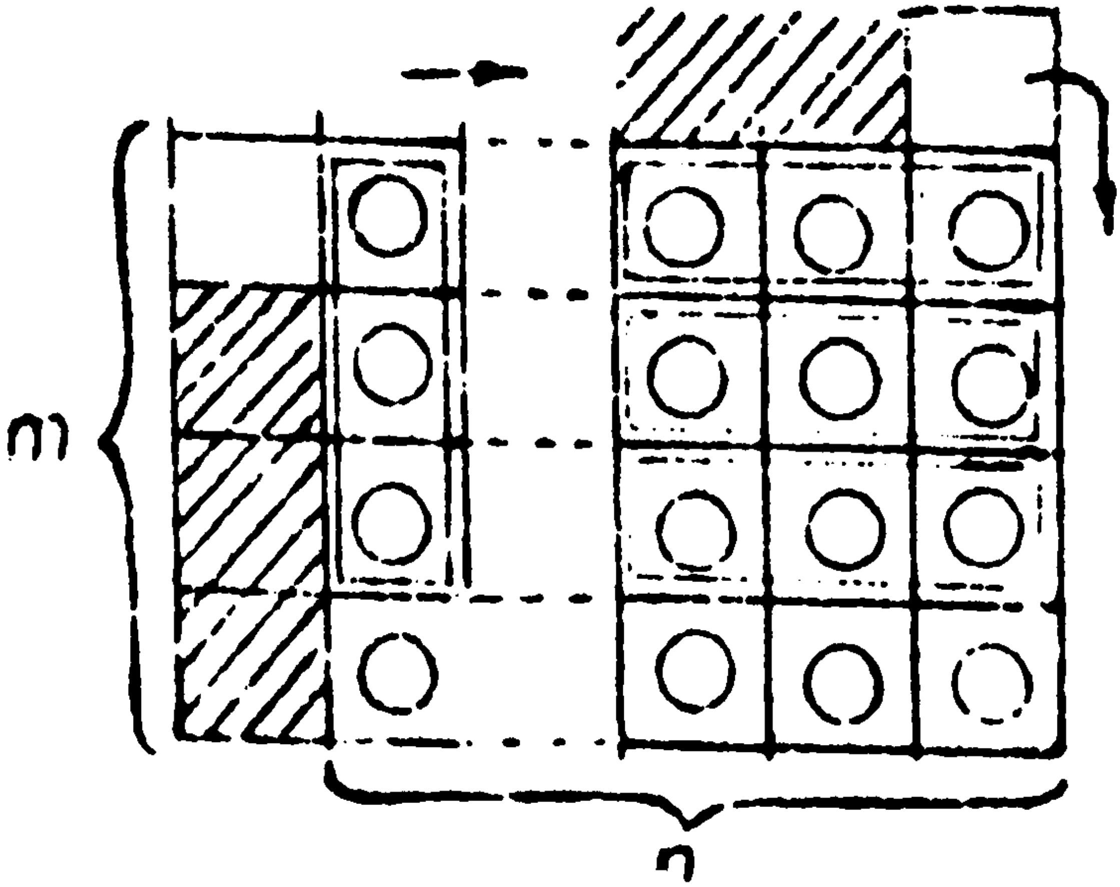
Enseguida se comprende que la estrategia que utilicemos en casos más complejos debe ser tal que mantenga las fichas lo más agrupadas posible. La secuencia de movimientos que veremos a continuación nos va a permitir no solamente ésto, sino también eliminar filas completas de las fichas del rectángulo.

Si en alguna parte del rectángulo hay cuatro fichas en la posición de la figura



es fácil encontrar una serie de movimientos permitidos mediante los cuales se eliminen las tres fichas horizontales y la cuarta se quede, al final, en la misma posición en la que está ahora.

Veremos a continuación como eliminar filas completas de tres en tres, utilizando este procedimiento. Consideremos el rectángulo m×n, representado en la figura (hay puntos suspensivos para indicar las columnas intermedias)

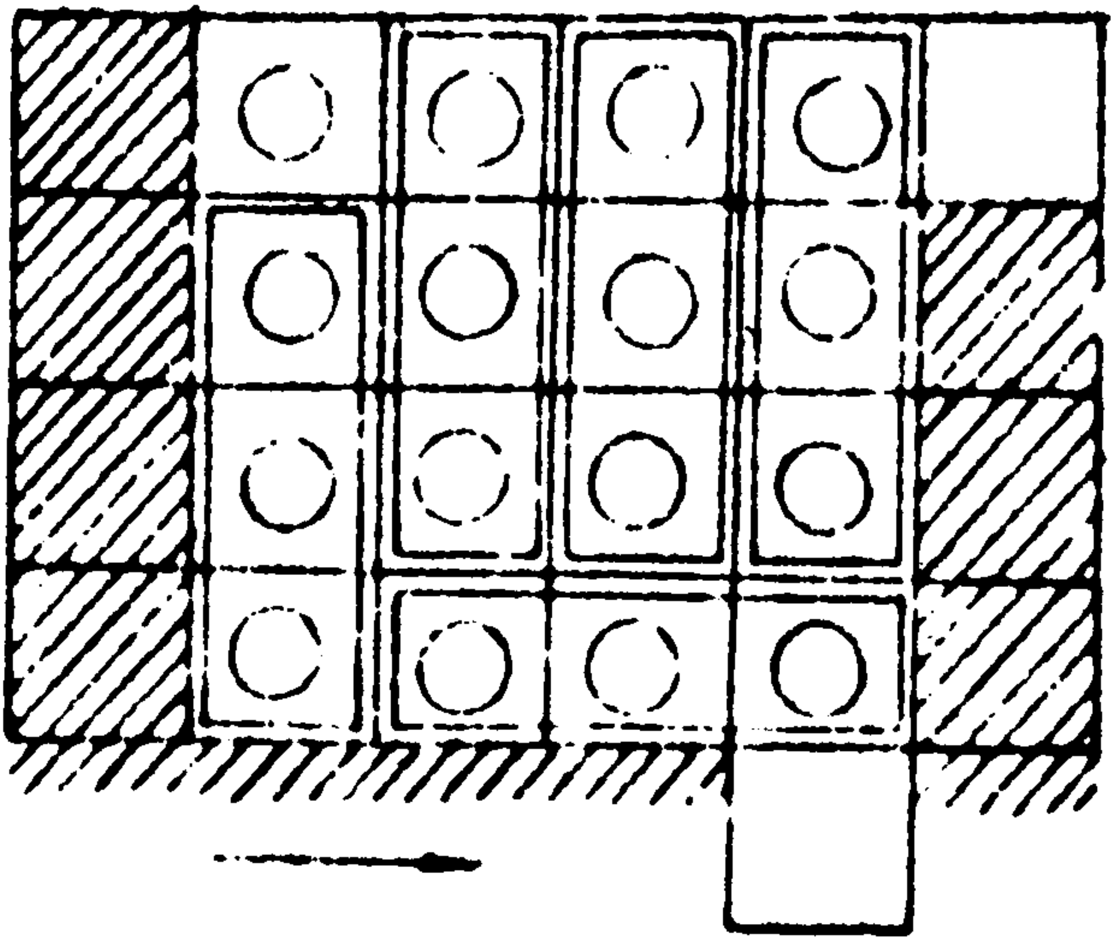


Comenzando por la columna de la izquierda, vamos eliminando grupos de tres fichas, en columna, de izquierda a derecha, hasta que queden las tres últimas columnas de la derecha. Y las últimas 9 fichas se eliminan en grupos de 3 fichas, horizontales, de arriba a abajo.

Así podemos eliminar las tres filas completas, pasando, por lo tanto, de un rectángulo $m \times n$ a un rectángulo $(m-3) \times n$.

Naturalmente, lo que hemos dicho acerca de las filas lo podríamos repetir para las columnas. Esto significa que mediante el procedimiento anterior bastará considerar sólo valores pequeños de m y n.

Además de los que ya hemos visto al principio, es instructivo ver cómo en el caso 4×4 se puede conseguir que quede 1 única ficha en el tablero; la siguiente figura muestra cómo:



Dejaremos la ficha de la esquina superior izquierda, eliminando las demás así: primero las 3 fichas que tiene debajo (en vertical); luego las 3 fichas horizontales de la fila inferior; y después, de derecha a izquierda, las que están en grupos de 3, verticales.

En este punto, cabe preguntarse, ¿cuándo quedarán 2 fichas y cuándo quedará 1? Como las filas (o columnas) del rectángulo se van eliminando de tres en tres, la respuesta del problema parece ser

DOS, si el producto mn es múltiplo de tres; UNA, en caso contrario

Sin embargo, el problema no está, todavía, completamente resuelto; es claro que nuestra estrategia funciona bien cuando queda una sola ficha en el tablero (no pueden quedar menos) : pero debemos demostrar que, en lo los demás casos (cuando el producto es múltiplo de tres), NO PUEDEN QUEDAR MENOS DE DOS FICHAS.

Analizaremos los casos 4×3 y 5×3.

Antes de empezar el juego, coloreamos las casillas del tablero con tres colores, A,B y C, tal como se indica en la figura (que sólo representa el rectángulo 4×3, pero se supone que TODAS las casillas del tablero están coloreadas - al tresbolillo, podríamos decir):

A	B	C	A
B	C	A	B
C	A	B	C

Como se puede observar, las casillas igualmente coloreadas están en las diagonales (de derecha a izquierda).

Pongamos ahora las fichas en el rectángulo 4×3. Antes de empezar a jugar, hay 4 fichas en las casillas de color A, 4 en las de color B y 4 en las de color C. Vamos a ver cuál es el efecto del movimiento del juego sobre el número de fichas que hay en las casillas de cada color. Para fijar ideas, supongamos que la ficha situada en la casilla de color A, del vértice superior derecho, es comida por la de su izquierda, que estaba en la casilla de color C, y que al saltar sobre ella ocupa una casilla de color B (no representada en la figura). Al hacer este movimiento, hay 3 fichas en las casillas de color A, 5 en las de color B y 3 en las de color C.

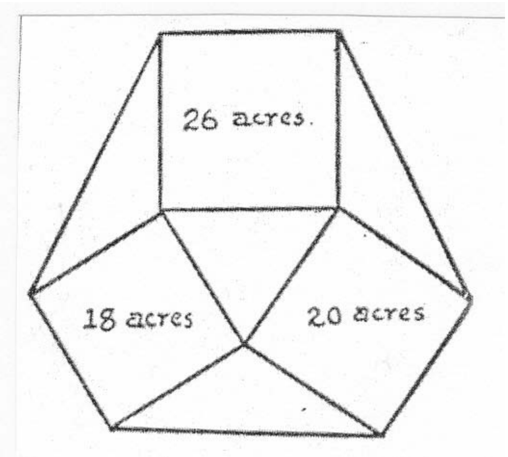
En otras palabras, el número de fichas en las casillas de un color aumenta en 1, y el número de fichas en las casillas de los otros 2 disminuye en 1. Inicialmente, los números de fichas en las casillas de cada color eran PARES, y después del movimiento del juego son IMPARES. Si el rectángulo fuera 5×3, la situación se invierte: antes de jugar el número de fichas en las casillas de cada color es IMPAR, y después del movimiento del juego, es PAR.

Esta situación puede expresarse diciendo que, en este juego, es invariante la paridad del número de fichas que hay en las casillas de cada color.

Pues bien, esto es suficiente para garantizar que, en el caso que nos ocupa (cuando mn es múltiplo de 3), NO PUEDEN QUEDAR MENOS DE DOS FICHAS. Porque si tal cosa sucediera, quedaría 1 sola ficha en el tablero, es decir, 0 fichas en las casillas de dos de los colores, y 1 en la casilla del tercer color. Pero los números 0-1-0 no tienen la misma paridad, y por lo tanto es imposible alcanzar esta situación.

Problema 2

La figura muestra tres cuadrados, de áreas respectivas 26, 18 y 20 unidades cuadradas. Se pretende determinar el área del hexágono irregular cuya construcción se indica en la propia figura.



(El dibujo reproduce la figura original, con las unidades británicas de superficie; el problema procede de un libro inglés de 1917).

Posibles vías de ataque del problema :

a) El triángulo central está perfectamente determinado; su área es calculable mediante la fórmula de Herón o cualquiera de las fórmulas del área del triángulo. Para calcular las áreas de los triángulos exteriores, hay que tener en cuenta que los ángulos cuyos lados se conocen son los suplementarios de los del triángulo central, y por lo tanto tienen el mismo seno: esto implica inmediatamente que los cuatro triángulos tienen la misma área, y además ocurre cualesquiera que sean las medidas de los lados del triángulo inicial.

b) La “formulita” del proponente, Dudeney. Dice en su libro: *Usaré la siguiente formulita para el área del triángulo central:*

$$\frac{\sqrt{4ab-(a+b-c)^2}}{4}$$

donde a,b y c representan las áreas de los tres cuadrados, en cualquier orden.

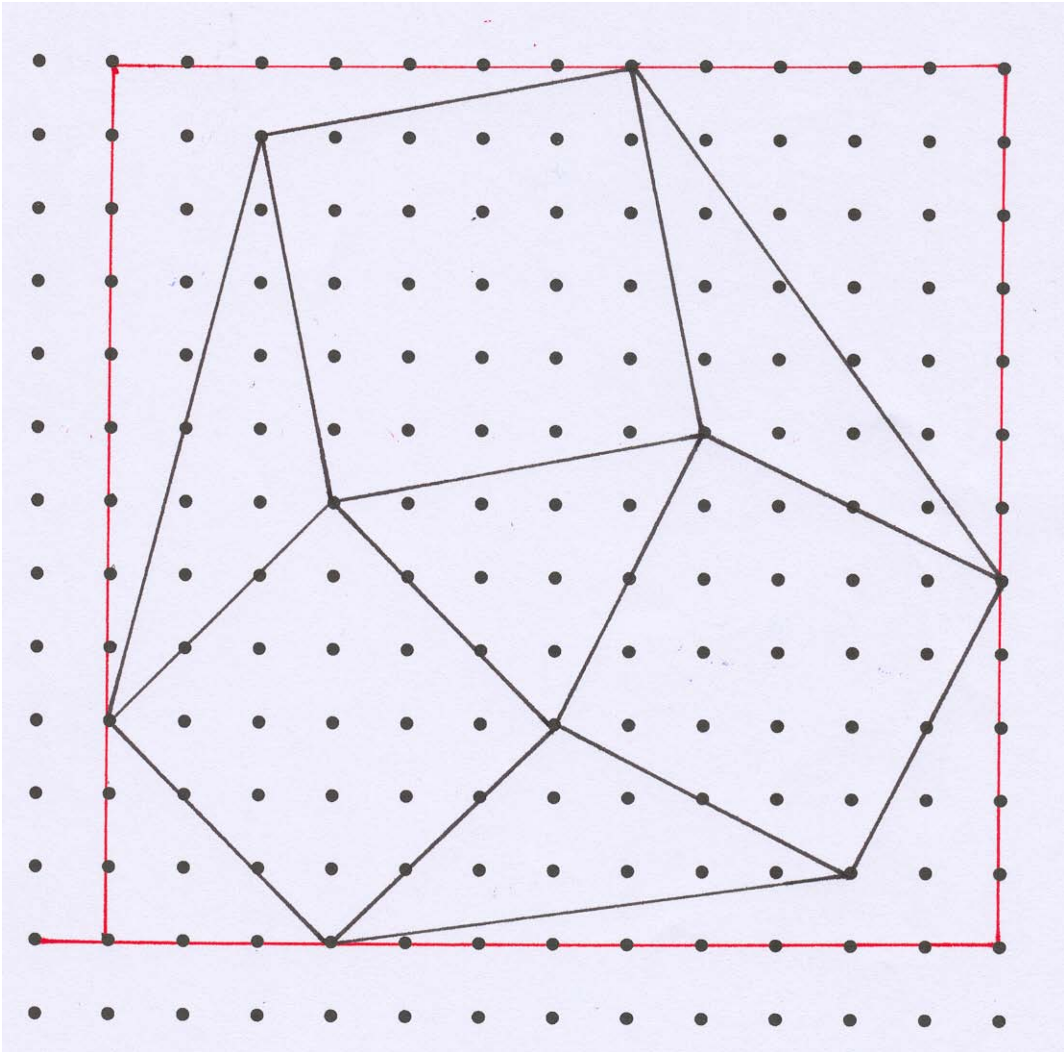
Y continúa diciendo: *Se prueba fácilmente que los cuatro triángulos de la figura tienen todos la misma área, 9.*

Es instructivo obtener esa “formulita” utilizando la expresión para el área mediante dos lados y el seno del ángulo que forman, y escribiendo el seno en función del coseno, calculado mediante el teorema del coseno en términos de los lados.

c)¿Podemos usar el teorema de Pitágoras para expresar 18, 20 y 26 como suma de dos cuadrados?

$$18 = 3^2 + 3^2 \ ; \ 20 = 4^2 + 2^2 \ ; \ 26 = 5^2 + 1^2$$

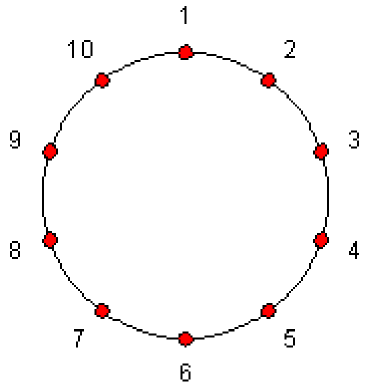
Esto permite dibujar la figura con bastante exactitud en una hoja cuadriculada o milimetrada. Los alumnos de ESTALMAT conocen con certeza el teorema de Pitágoras.



Ahora está claro que el problema se reduce “a contar cuadraditos” y de aquí resulta en seguida que la respuesta es 100 unidades cuadradas.

Problema 3

Diez personas están sentadas alrededor de una mesa redonda. Cada una piensa un número y lo dice al oído a las dos personas que tiene a sus lados (una a su derecha y otra a su izquierda). Después, cada persona dice en voz alta la semisuma de los números que ha oído. He aquí los números dichos por cada persona:



Averiguar el número pensado por la persona que dijo "6".

Sean $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ los números pensados por las personas que dijeron $1,2,\cdots,10$, respectivamente. Es inmediato escribir las ecuaciones

$x_1+x_3 = 4$; $x_2+x_4=6$

$x_3+x_5 = 8$; $x_4+x_6=10$

$x_5+x_7 = 12$; $x_6+x_8=14$

$x_7+x_9 = 16$; $x_8+x_{10}=18$

$x_9+x_1 = 10$; $x_{10}+x_2=2$.

Sumando todas las ecuaciones de la derecha, se obtiene

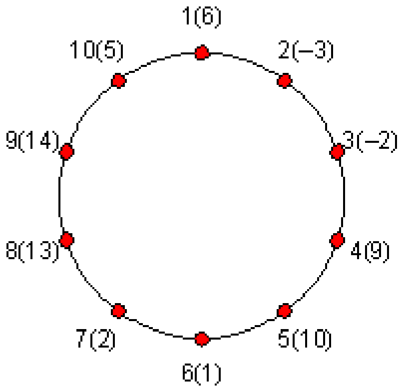
$2(x_2+x_4+x_6+x_8+x_{10}) = 50,$

$2(6+x_6+18) = 50$

$x_6+24 = 25$

$x_6 = 1.$

Aunque el enunciado del problema no lo pide, se pueden completar los números pensados por todas y cada una de las 10 personas:



Si se hace la prueba con 12 personas, el sistema que resulta no es compatible.

Problema 4

Una sucesión finita de números reales es tal que la suma de 7 términos consecutivos cualesquiera es negativa, y la suma de 11 términos consecutivos cualesquiera es positiva.

¿Cuál es el mayor número de términos que puede tener tal sucesión?

Este es un ejemplo de lo que Arthur Engel llamaría "un buen problema para un concurso", es decir, un problema frente al cual un profesor experto no tiene, necesariamente, ventaja frente a un alumno. Daremos noticia de su procedencia al final, después de las indicaciones para su solución.

Indicaciones para la solución

Comencemos formando un cuadro con términos de la sucesión:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\
a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17}
\end{array}$$

Si nos fijamos en las filas de este cuadro, observamos que están formadas por 7 términos consecutivos de la sucesión, asi que las sumas de los números por filas son negativas; por su parte, las columnas del cuadro están formadas por 11 términos consecutivos de la sucesión y por lo tanto sus sumas son positivas. Pero esta situación es claramente absurda: la suma de todos los números del cuadro no puede ser negativa si los sumamos por filas y negativa si los sumamos por columnas.

Por consiguiente, es imposible que la sucesión llegue a tener 17 términos.

Ya que el número máximo de términos de la sucesión no puede ser 17, veamos como encontrar una sucesión, en las condiciones del problema, que esté formada por 16 términos.

Para ello le impondremos a la sucesión dos condiciones suplementarias, que no aparecen en el enunciado del problema:

Buscaremos una sucesión que sea capicúa, es decir, se lea igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha;

y además, sea tal que la suma de los 7 términos consecutivos cualesquiera valga -1 y la suma de los 11 términos consecutivos cualesquiera valga +1.

Cuando estas dos condiciones suplementarias se aplican a la sucesión que buscamos, encontramos que se reduce drásticamente el número de términos distintos que puede tener la sucesión, y un sistema de dos ecuaciones en dos incógnitas conduce a la solución

5,5,-13,5,5,5,-13,5,5,-13,5,5,5,-13,5,5

con lo que la solución del problema se completa.

En el libro rumano de Ion Cuculescu, *Olimpiadele Internationale de Matematica ale elevilor, Editura tehnica, Bucarest 1984,* se pueden encontrar varias soluciones y generalizaciones, halladas por los concursantes, de este bello problema, propuesto por Viet Nam en la Olimpiada Matemática Internacional de 1977. El procedimiento esbozado para calcular el ejemplo figura desarrollado en el libro de Samuel Greitzer, *International Mathematical Olympiads 1959-1977*, publicado por la Mathematical Association of America en 1978.

En el libro *Mathematical Puzzles (A Connoisseur’s Collection),* de Peter Winkler, *A.K.Peters 2004* se incluye una variante de este problema, con una buena solución por inducción.

Problema 5

Este es otro problema "mítico". Lo vi sin solución en la revista alemana "Praxis der Mathematik" y sólo en diciembre de 2009 supe su procedencia: la Competición Matemática de Stanford de 1958, donde fue propuesto por nada menos que George Polya :

¿Cuál es la edad del capitán, cuántos hijos tiene, y cuál es la eslora (longitud) de su barco? Se conoce el producto, 32118, de los tres números enteros buscados; la eslora se mide en pies (más de 1); el capitán tiene hijos e hijas; tiene más años que el número total de sus hijos, pero no llega a tener 100 años.

Sean *x,y,z* el número de hijos, la edad del capitán, y la longitud del barco. Entonces se deben cumplir las condiciones

$$xyz = 32118$$

$$4 \leq x < y < 100$$

Descompongamos 32118 en factores primos:

$$32118 = 2 \times 3 \times 53 \times 101$$

Hay 6 maneras de descomponer este número en producto de tres factores distintos de 1:

6x53x101	2x101x159
3x101x106	2x53x303
3x53x202	2x3x5353

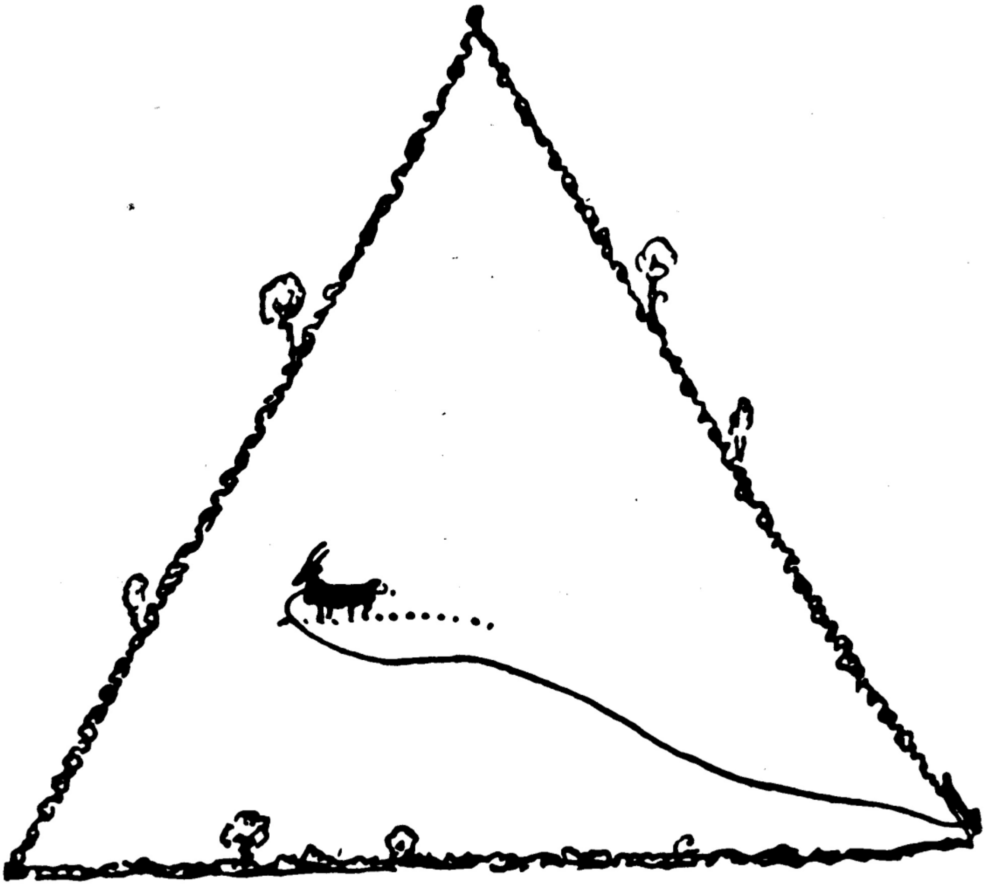
Sólo la primera de estas descomposiciones presenta dos factores entre 4 y 100. Por lo tanto, el capitán tiene 6 hijos, 53 años, y su barco mide 101 pies de eslora (30,78 m, cifra razonable).

Stella Baruk, una pedagoga francesa, escribió en los años 60 del pasado siglo un furibundo alegato contra los concursos de problemas bajo el título "Quelle est l'âge du capitain?". La pregunta es: ¿consiguió ella resolver el problema?...

Problema 6

La versión "discreta" del problema de la cabra, conocido por todos los estudiantes de Cálculo Integral

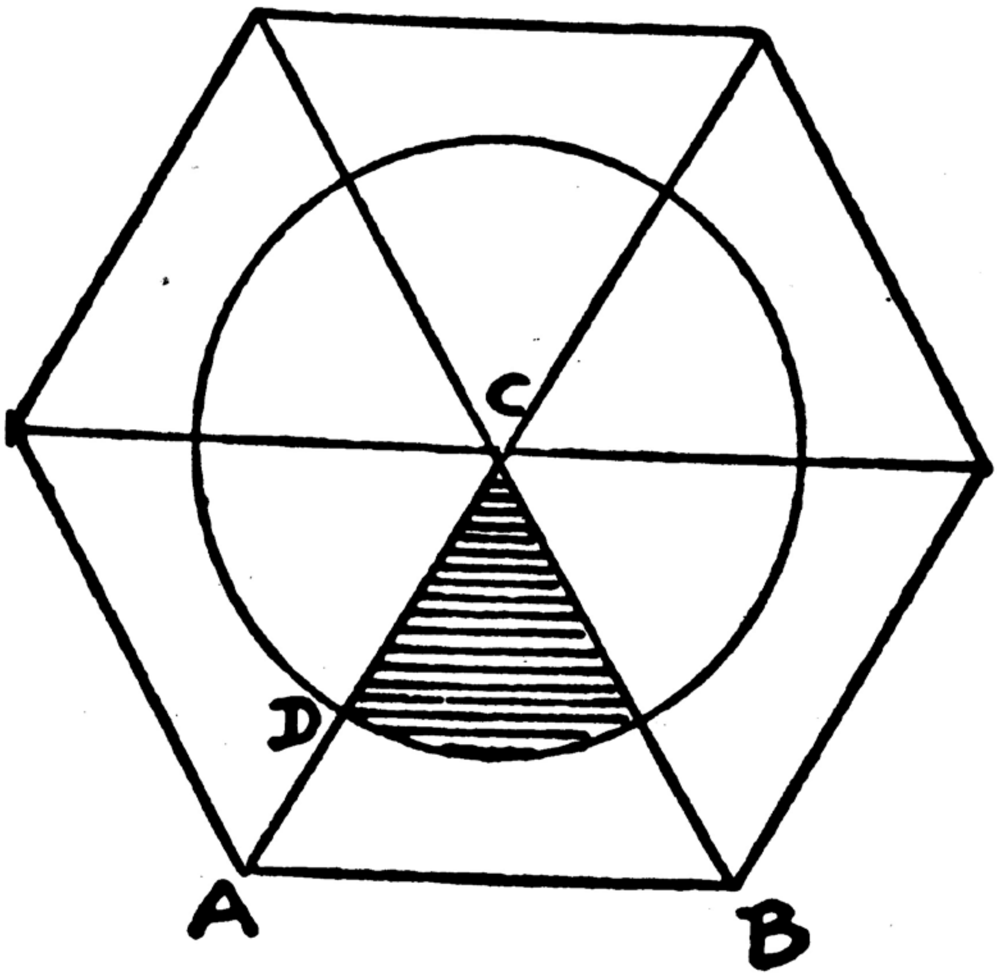
El triángulo de la figura es equilátero.



La superficie del triángulo es 1/2.
¿Cómo de larga ha de ser la cuerda
para que la cabra se pueda comer
la mitad de la hierba del campo?

Origen del problema: ***Amusements in Mathematics, de Dudeney (1917).***

Solución “casi sin palabras” : Véase la siguiente figura.



La longitud de la cuerda es CD = r. El área del círculo es πr^2, y por lo tanto la de la parte sombreada en la figura es $\frac{\pi r^2}{6}$.

Por su parte, el área de cada uno de los triángulos equiláteros ABC es 1/2. Entonces, de acuerdo con las condiciones del problema, será $\frac{\pi r^2}{6} = \frac{1}{4}$ o lo que es lo mismo, $\pi r^2 = \frac{3}{2}$. De aquí, $r = \sqrt{\frac{3}{2\pi}}$ que aproximadamente vale 0,69.

Problema 7

Procedencia del problema: Olimpiada de Rusia, 2008, fase de Distrito, clase 9 (alumnos de 12 años de edad). Autor: Sergei Berlov.

Se da un entero positivo $n>1$**. Para cada divisor** d **de** $n+1$**, se realiza la siguiente operación : Se divide** n **entre** d**; el cociente se escribe en la pizarra y el resto de la división se escribe en un papel.**

Demostrar que el conjunto de números que se escriben en la pizarra es el mismo que el que se escriben en el papel.

Comentario inicial

Probablemente sea aconsejable, antes de proponer “crudamente” la segunda frase del enunciado del problema, pedir a los alumnos que formen una tabla con lo que se va obteniendo, eligiendo adecuadamente los valores de *n*, para que no sea demasiado trivial.

Por ejemplo, sea $n+1=18$; $n= 17$; $d \in \{1,2,3,6,9,18\}$.

n=17	*17=dq+r*	*Cociente q*	*Resto r*
d=1	*17=1x17+0*	*17*	*0*
d=2	*17=2x8+1*	*8*	*1*
d=3	*17=3x5+2*	*5*	*2*
d=6	*17=6x2+5*	*2*	*5*
d=9	*17=9x1+8*	*1*	*8*
d=18	*17=18x0+17*	*0*	*17*

Justificación del resultado:

Pongamos $n+1=d\cdot f$. Entonces se tiene

$$n=(n+1)-1=(f-1)d+d-1, \text{ con } 0\le d-1<d .$$

Pero esto significa que $f-1$ y $d-1$ son el cociente y el resto de la división de *n* entre *d.* Como al recorrer *d* el conjunto de los divisores de $n+1$, *f* recorre este mismo conjunto en otro orden, es claro que los dos conjuntos escritos tienen los mismos elementos.

Problema 8

Procedencia del problema: Olimpiada de Rusia 1990, Fase final. Nivel 9 (Alumnos de 12 años de edad). Autor del problema: Igor Voronovich, Minsk.

Demostrar que para cualquier t**, se verifica** $t^4 - t + (1/2) > 0$.

Solución

Obsérvense las ventajas de sumar 0 a cualquier cantidad, y escribir $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \ldots$

Se tiene:

$$t^4 - t + \frac{1}{2} = \left(t^4 - t^2 + \frac{1}{4}\right) + \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) = \left(t^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$$

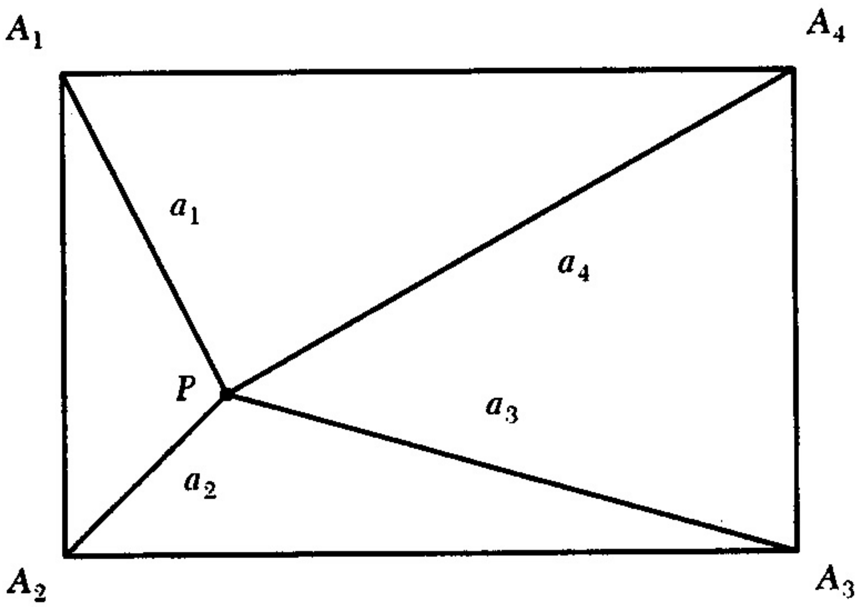
La desigualdad es estricta porque los dos sumandos son no negativos y no pueden ser cero simultáneamente.

Problema 9

(El acertijo 3-4-5)

Si P es interior al rectángulo ABCD, tal que PA = 3, PB = 4, PC = 5, ¿cuánto mide PD? [1]

Con vistas a una generalización, podemos cambiar las notaciones:



Análisis del Problema

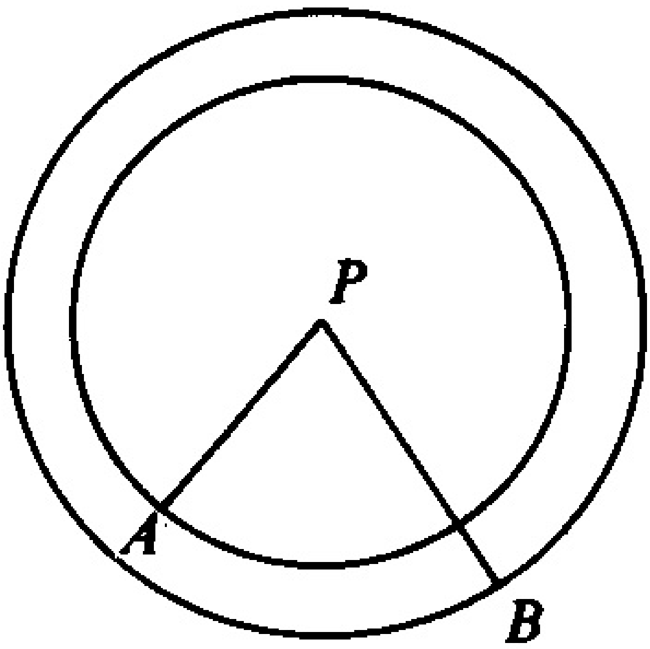
Algunas preguntas para empezar

¿Cuánto mide el ángulo APC?

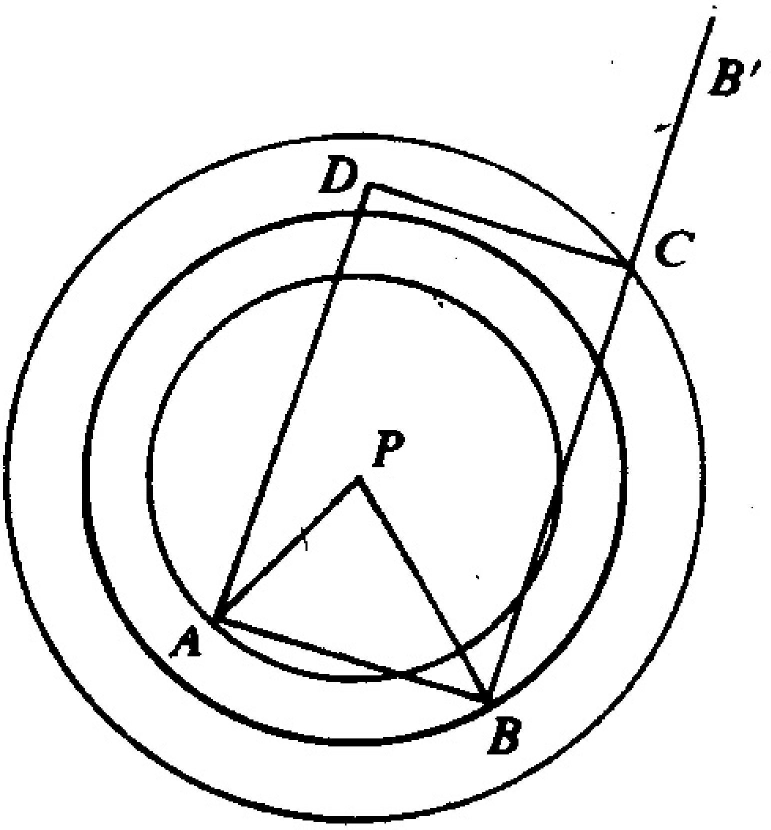
¿Se da suficiente información sobre el rectángulo para resolver el problema?

¿Está determinado el rectángulo por los tres segmentos PA, PB y PC?

En principio, el punto A puede ser cualquiera de los puntos de una circunferencia de centro P y radio 3, y B estará en una circunferencia de centro P y radio 4:

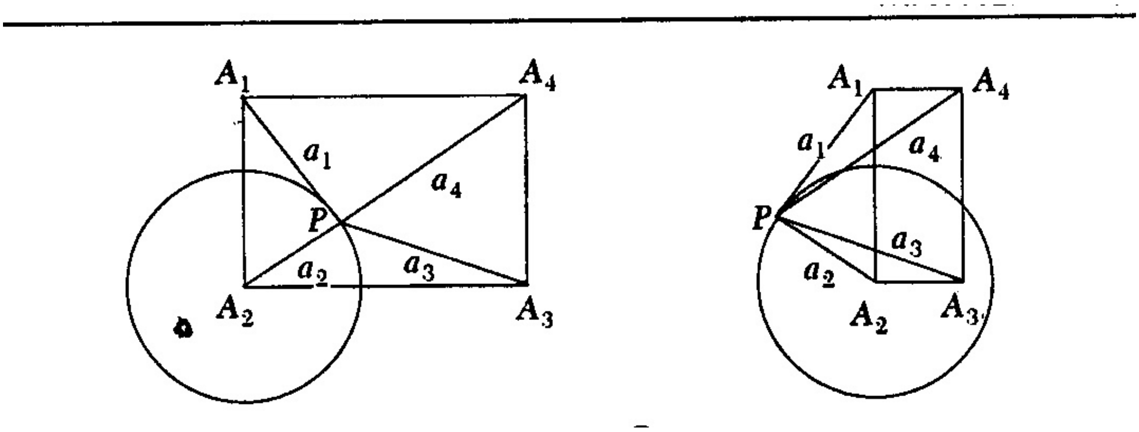


Hay infinitas posiciones en las que puede estar B, pero no todos los puntos de la circunferencia son admisibles si P ha de ser interior. Para localizar el punto C se traza BB’ perpendicular a AB. Ya que PC = 5, se traza la circunferencia de centro P y radio 5, que cortará a BB’ en C. Ya que tres vértices determinan un rectángulo, ABCD queda ahora fijado. Si P no está dentro del rectángulo, cambiamos la posición de B hasta conseguirlo. Ya que B puede tener un número infinito de posiciones, hay infinitos rectángulos que satisfacen las condiciones del problema (PA = 3, PB = 4, PC = 5).



Ello implica, además, que los ángulos APB y APC no son únicos.

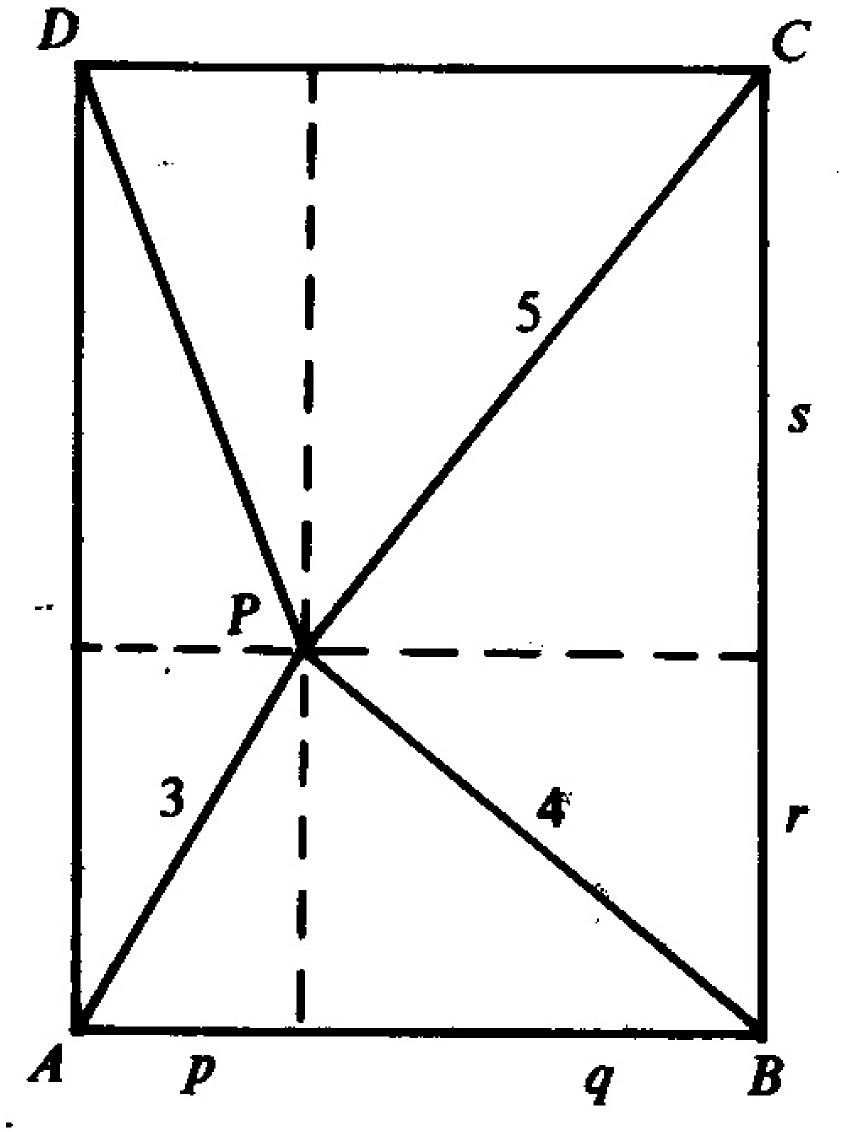
En la figura siguiente vemos dos rectángulos distintos para los mismos valores de las distancias de P a los vértices (tomada de [3])



Veamos con detalle una solución del problema.

Si pretendemos utilizar coordenadas, como siempre la cuestión es dónde situar el origen. Las cosas se simplificarán **si elegimos el origen en P.** Pero normalmente, los alumnos de ESTALMAT no conocen todavía coordenadas, pero sí el teorema de Pitágoras.

Tracemos rectas por P perpendiculares a los lados del rectángulo ABCD; una de ellas corta a AB en segmentos de longitudes *p* y *q,* y la otra a BC en segmentos de longitudes *r,s.*



El teorema de Pitágoras nos permite escribir, sucesivamente,

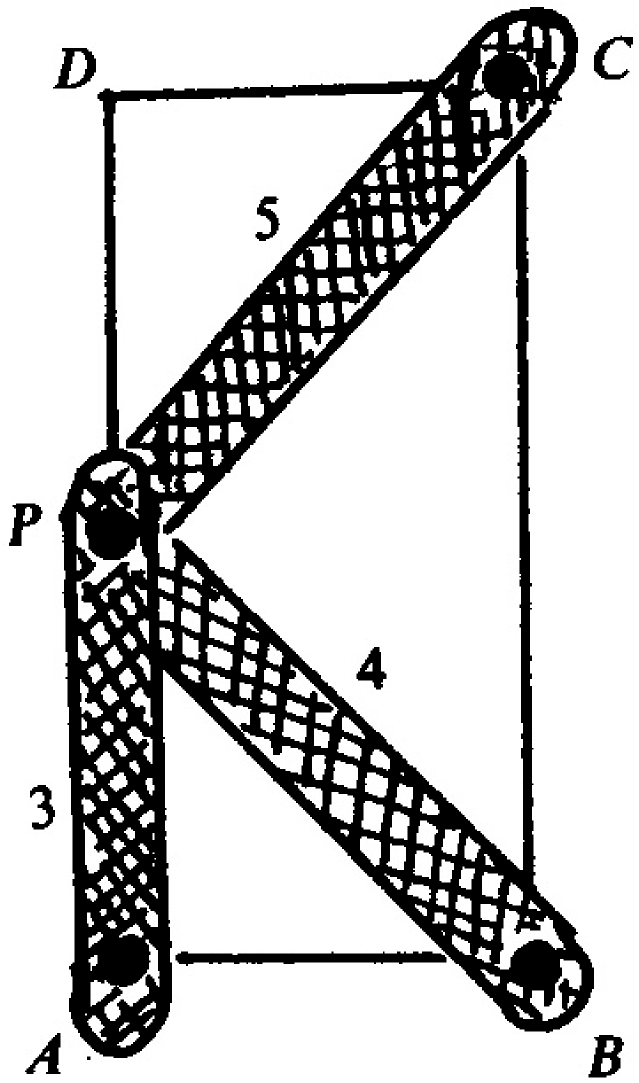
$$3^2 = p^2 + r^2 \; ; \; 5^2 = s^2 + q^2 \; ; \; 4^2 = q^2 + r^2 \; ; \; PD^2 = p^2 + s^2$$

Pero la suma de las dos primeras ecuaciones es igual a la suma de las dos últimas, así que tenemos

$$3^2 + 5^2 = 4^2 + PD^2$$

y entonces $PD = 3\sqrt{2}$.

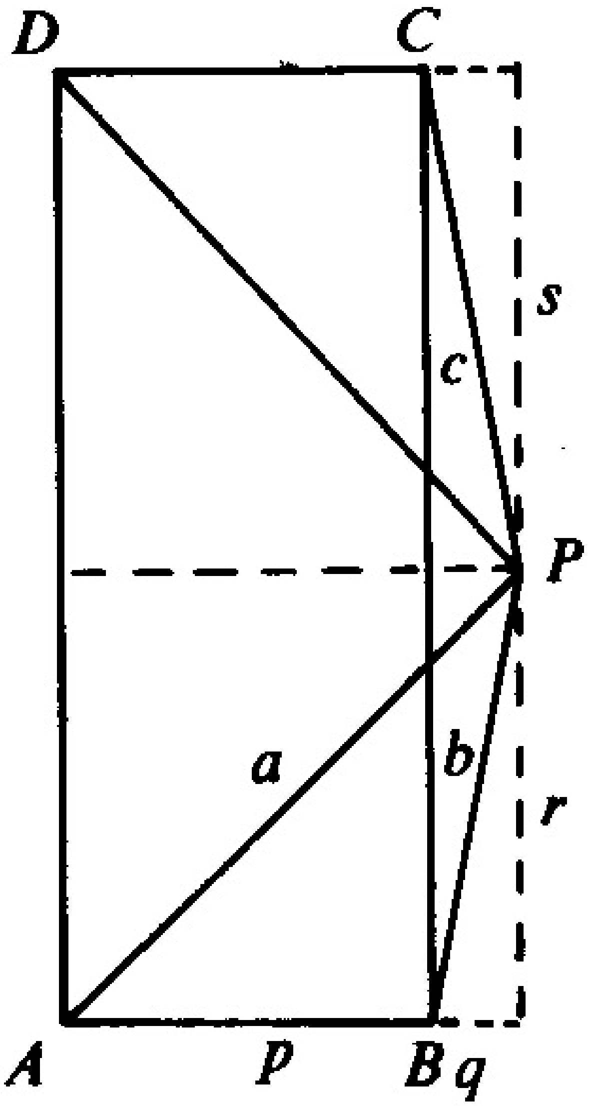
La solución se mantiene si P está en uno de los lados del rectángulo:



(La figura recuerda las piezas que se montaban con el Meccano, uno de los "juguetes" más caros de mi infancia).

Y entonces, **<u>¿por qué no analizar el caso en el que P está fuera del rectángulo?</u>**

Olvidémonos del 3-4-5 :



(b)

Se sigue manteniendo la igualdad

$$PD^2 + PB^2 = PA^2 + PC^2$$

Esta igualdad es la que Stanley Rabinowitz llama **relación de Feuerbach** en su libro (aún no publicado), ***Ptolemy's Legacy***, y que cuando estaba yo preparando esta charla tuvo la amabilidad de enviarme su versión preliminar – un fichero en pdf de casi 250 páginas - apenas diez minutos después de yo enviarle un e-mail mostrándole mi interés por él, ya que no se podía descargar de la red.

La relación de Feuerbach sigue siendo válida si consideramos que P está por encima del plano ABCD, tal como mostrábamos en la segunda de las figuras.

Problema 10

Un problema de la Olimpiada británica de 1987

Si x, y, z son números reales positivos, hallar razonadamente el máximo valor de la expresión

$$\frac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)}$$

Solución

1)<u>Observaciones previas</u>

Cada uno de los tres factores del numerador aparece en dos factores separados en el denominador. Entonces, si se intenta hacer la expresión mayor aumentando en el numerador por ejemplo la x, el denominador aumenta como x^2, asi que de hecho cuando x tiende a infinito la fracción tiende a 0. Por otra parte, si se intenta aumentar la fracción disminuyendo el denominador, no es suficiente disminuir *una* de las variables, porque por ejemplo *x,y* están juntas en el mismo paréntesis, hay que disminuir dos de las variables al mismo tiempo (por ejemplo, *x* e *y)* y entonces el numerador contiene al producto *xy*, así que la fracción se hace muy pequeña. Por lo tanto parece que los valores de las variables para los que se alcance el máximo no deben ser ni muy grandes ni muy pequeños.

Hagamos algunas pruebas:

x=y=z=1	F(x,y,z)=1/(2.2.2.17)=1/136
x=y=z=2	F(x,y,z)=2.2.2/3.4.4.18=1/108
x=4,y=8,z=16	F(x,y,z)=1/900

Las pruebas no son demasiado prometedoras...

Una de las cosas más desagradables de la expresión dada es que no parece simplificarse fácilmente.

<u>¿Y si le diéramos la vuelta a la fracción?</u>

En ese caso tendríamos

$$\frac{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)}{xyz},$$

y deberíamos buscar el mínimo valor de esta fracción.

Naturalmente, ahora no parece muy bueno ponerse a multiplicar alocadamente; pero sí separar los tres factores del denominador y asociarlos a los tres últimos factores del nuevo numerador, para que queden los cuatro en la forma (1 + algo) :

$$(1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)\left(1+\frac{16}{z}\right).$$

Convendría también que la expresión fuera más simétrica, y eso se consigue con un pequeño cambio de variable:

$$x=p, (y/x)=q, (z/y) = r, (16/z) = s$$

así que la expresión es

$$(1+p)(1+q)(1+r)(1+s),$$

Y además se observa que

$$pqrs=16xyz/(xyz) = 16 = 2^4.$$

Tratemos de seguir el consejo de Pólya: *si un problema presenta una situación demasiado complicada, inténtese el mismo problema con una situación más sencilla.*

Quedémonos sólo con dos factores, suponiendo que $pq = c^2$ *(en el caso general se sabe que el producto pqrs es una cuarta potencia)*. Tenemos

$$(1 + p)(1 + q) = 1 + p + q + pq = 1 + p + q + c^2$$

y queremos acotar inferiormente esta suma. **La desigualdad de las medias aritmética y geométrica debería surgir de una manera bastante natural para acotar p + q:**

$$p + q >= 2(pq)^{1/2} = 2c,$$

con lo que se llega a

$$(1 + p)(1 + q) >= 1 + 2c + c^2 = (1 + c)^2.$$

¡Esto ya es mucho más prometedor! El segundo miembro es constante, y en realidad hemos utilizado el hecho, bien conocido, de que si un producto de números positivos es constante, su suma es mínima cuando son iguales. Vamos a ver lo que sucede con tres factores

$$(1+p)(1+q)(1+r)$$

suponiendo que $pqr = c^3$.

Ahora tenemos

$$(1+p)(1+q)(1+r) = 1 + p + q + r + pq + qr + pr + pqr,$$

y la desigualdad aritmético – geométrica la vamos a aplicar dos veces :

$$p + q + r >= 3(pqr)^{1/3} = 3c,$$

$$pq + qr + rp >= 3(p^2q^2r^2)^{1/3} = 3c^2,$$

de modo que en definitiva queda

$$(1+p)(1+q)(1+r) >= 1 + 3c + 3c^2 + c^3 = (1 + c)^3.$$

El siguiente paso ya es el último: (**y además lo damos en la seguridad de que vamos por buen camino)**

Es claro que ahora $c = 2$; y se tiene

$$(1+p)(1+q)(1+r)(1+s) =$$

$$=1+p+q+r+s+pq+pr+ps+qr+qs+rs+pqr+pqs+prs+qrs+pqrs$$

Ahora necesitamos aplicar tres veces la desigualdad aritmético – geométrica:

$$p+q+r+s >= 4(16)^{1/4} = 4.2$$

$$pq+pr+ps+qr+qs+rs >= 6((p^3q^3r^3s^3)^{1/6}) = 6.4=6.2^2$$

$$pqr+pqs+prs+qrs >= 4((p^3q^3r^3s^3)^{1/4})=4.2^3$$

con lo que resulta

$$(1+p)(1+q)(1+r)(1+s)>= 1+4.2+6.2^2+4.2^3+2^4 = (1+2)^4 = 81,$$

y volviendo al problema original resulta que el máximo valor buscado es 1/81, que se alcanza para *x=2, y=4, z =8.* ■

Aquí no solamente resulta obligado dar el origen del problema, sino también el nombre y la foto del autor de esta presentación: se trata del inglés ***Anthony Gardiner***, que aparece a la derecha recibiendo en Sevilla el Premio Paul Erdös de la WFNMC, en 1997.

Tony es profesor de la Universidad de Birmingham, un magnífico expositor y autor de uno de los mejores libros sobre preparación de Olimpiadas: **The Mathematical Olympiad Handbook (*An introduction to problem solving*),** *Oxford University Press 1997.* Es imposible leer este libro **sin papel y lápiz**, porque los resultados parciales que se van obteniendo aparecen reemplazados por puntos suspensivos... de manera que el lector está obligado a realizar los cálculos por sí mismo.

Problema 11

Un ejemplo del método de inducción

El capítulo sobre el método de inducción de *Matemáticas y razonamiento plausible, Tecnos, Madrid 1966, de George Pólya,* es simplemente magistral, y debería ser un libro de obligada lectura para **todo** aspirante a profesor de Matemáticas, cualquiera que sea su nivel. De esta fuente se deriva lo que sigue.

Consideremos la suma

$$S_1=1+2+3+\cdots+(n-1)+n,$$

donde n es un número natural. Debe observarse que, en realidad, estamos considerando una familia de sumas :

$$1$$

$$1+2$$

$$1+2+3$$

$$1+2+3+4$$

etc

donde el número de sumandos es **variable**.

¿Existirá una fórmula "cerrada", es decir, con un número finito de operaciones, que nos permita obtener el valor de S_1 para cada valor de n?

La respuesta es afirmativa, y desde la creatividad de Gauss se conoce una demostración no inductiva:

$$S_1 = 1+2+3+\cdots+n$$

$$S_1 = n+(n-1)+\cdots+1$$

y sumando "por columnas" se obtiene

$$2S_1=(n+1)n,$$

con lo cual hemos demostrado que

$$S_1=1+2+3+\cdots+(n-1)+n=n(n+1)/2, \qquad (1)$$

cualquiera que sea el número natural n.

El primer ejemplo de una proposición P que demostraremos por inducción va a ser, precisamente, la igualdad que da S_1:

P: $1+2+3+\cdots+n=n(n+1)/2.$

1) **P** es cierta para el primer número natural, n=1: en este caso, la suma del primer miembro sólo tiene el primer sumando, 1 ; y la expresión del segundo miembro da, para n=1,

$$(1\cdot 2)/2=1.$$

2) Etapa inductiva : Supongamos que la proposición P es cierta para un número natural cualquiera, n:

$$1+2+3+\cdots+n=n(n+1)/2.$$

Tenemos que probar que también lo es para el siguiente, n+1:

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=(n+1)(n+2)/2$$

Para ello, sustituyamos la suma de los n primeros sumandos por el valor que estamos suponiendo cierto : tendremos que probar que

$$\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \,;$$

(y obsérvese que ahora ya tenemos una igualdad con un número finito de operaciones en cada miembro) lo cual es inmediato en cuanto saquemos en el primer miembro factor común n+1 y hagamos operaciones. Esto termina la etapa inductiva y por lo tanto hemos probado la fórmula (1) por inducción.

Planteemos ahora el problema de calcular la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales

$$S_2(n)=1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2,$$

la suma de los cubos

$$S_3(n)=1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3,$$

o, en general, la suma de las potencias de exponente k:

$$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+(n-1)^k+n^k$$

El primer problema que tenemos es conjeturar cuanto valdrán ; después llegará el momento de probar que nuestra conjetura es cierta. (**Es lo que Paul Erdös consideraba el trabajo de cualquier matemático: *conjeturar* y *probar***)

A la búsqueda de una pista, formemos una tabla con los primeros valores de S_1,S_2 y S_3:

n	1	2	3	4	5	6
S_1	1	3	6	10	15	21
S_2	1	5	14	30	55	91
S_3	1	9	36	100	225	441

La relación entre S_1 y S_3 parece clara : la conjetura natural es

$$1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=n^2(n+1)^2/4, \qquad (2)$$

y en este caso nos podemos ahorrar la fase primera de la inducción; la tabla demuestra que la proposición (2) es cierta para los seis primeros números naturales.

Con objeto de probar la fase inductiva, suponemos que (2) es verdad para el número natural arbitrario n ; debemos probar que

$$1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=(n+1)^2(n+2)^2/4,$$

y sustituyendo los primeros n sumandos del primer miembro por el segundo miembro de (2), debemos demostrar que

$$\frac{n^2\left(n+1\right)^2}{4}+\left(n+1\right)^3=\frac{\left(n+1\right)^2\left(n+2\right)^2}{4},$$

lo cual se demuestra fácilmente, con lo que hemos terminado la fase inductiva y, por tanto, demostrado por inducción la validez de la fórmula (2).

La situación para S_2 es más difícil. No parece sencillo conjeturar la forma general cerrada del segundo miembro de la suma $S_2(n)$ a partir de los valores iniciales del cuadro (ni tampoco si tuviéramos algunos más).

¿Cómo estarán relacionadas S_1 y S_2? **Añadamos a la tabla una nueva fila, que dé los valores de S_2/S_1. (Ésta es aquí la idea clave)**

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
S_1	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**
S_2	**1**	**5**	**14**	**30**	**55**	**91**
S_2/S_1	$\frac{1}{1}=\frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$	$\frac{30}{10}=3=\frac{9}{3}$	$\frac{55}{15}=\frac{11}{3}$	$\frac{91}{21}=\frac{13}{3}$

¡Ahora sí podemos conjeturar con una cierta base! Parece que

$$S_2/S_1=(2n+1)/3,$$

lo cual nos lleva a la hipótesis de que

$$S_2=n(n+1)(2n+1)/6,$$

que confirmaremos por el método de inducción, ahora sin dificultades dignas de mención...

Pascal, naturalmente, tenía un método propio para llegar a este resultado :

Pongamos

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1,$$

o, en forma equivalente

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1,$$

que sabemos es válida para cualquier número natural n.

Escribamos las n igualdades que resultan de ésta, desde n=1 hasta n:

$$2^3-1^3 = 3\cdot1^2+3\cdot1+1$$

$$3^3-2^3 = 3\cdot2^2+3\cdot2+1$$

...

$$n^3-(n-1)^3 = 3\cdot(n-1)^2+3\cdot(n-1)+1$$

$$(n+1)^3-n^3 = 3n^2+3n+1$$

Cuando sumemos miembro a miembro, la suma de los primeros miembros es una suma telescópica, cuyo valor se reduce a

$$(n+1)^3-1^3;$$

sumando las tres columnas de los segundos miembros se obtiene, evidentemente

$$3S_2+3S_1+n,$$

con lo cual obtenemos

$$S_2=(2n^3+3n^2+n)/6=n(n+1)(2n+1)/6,$$

como antes.

Este método de Pascal es el que emplearemos para encontrar un modo de calcular S_k ; para eso escribimos

$$(n+1)^{k+1}-n^{k+1}=\frac{k+1}{1}n^k+\frac{k+1}{2}n^{k-1}+\cdots+1$$

y escribimos esta igualdad desde n=1 hasta n:

$$\begin{aligned}
&2^{k+1}-1^{k+1}=\left(k+1\right)\cdot 1^k+\frac{k+1}{2}\cdot 1^{k-1}+\cdots+1\\
&3^{k+1}-2^{k+1}=\left(k+1\right)\cdot 2^k+\frac{k+1}{2}\cdot 2^{k-1}+\cdots+1\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\left(n+1\right)^{k+1}-n^{k+1}=\left(k+1\right)\cdot n^k+\frac{k+1}{2}\cdot n^{k-1}+\cdots+1
\end{aligned}$$

así que, sumando miembro a miembro, obtendremos la fórmula recurrente

$$(n+1)^{k+1}-1=(k+1)S_k(n)+\frac{k+1}{2}S_{k-1}(n)+\cdots+n$$

de la que es posible despejar $S_k(n)$ suponiendo conocidas $S_{k-1},\cdots,S_2,S_1$. Esta es una fórmula recurrente.

Problema 12

Un problema del Torneo de las Ciudades

Problema 5, Sesión principal, Nivel senior, 1984

En la isla de Camelot hay 13 camaleones grises, 15 marrones y 17 rojos. Si se encuentran dos camaleones de colores distintos, cambian simultáneamente volviéndose del tercer color. ¿Es posible que todos los camaleones se vuelvan del mismo color?

(V.G.Ilichev, 12 puntos)

Solución

De las diferentes formas que hay de resolver este problema (en el sitio web "Cut the knot", de Alexander Bogomolny, hay 3) voy a exponer la que incluyó Terry Tao (una de las medallas Fields de 2006) en su pequeño, pero gran libro *Solving Mathematical Problems: A personal Perspective (1992).*

Deberíamos intentar primero probar que la respuesta es "no". Si fuera "si", debería haber un procedimiento específico para lograrlo, y esto suena más computacional que matemático. Y como el problema proviene de un concurso matemático, hay buenas razones para pensar que "sí" no es la respuesta correcta. Luego intentaremos probar que no es posible alcanzar esa uniformidad de colores.

En todo caso, primero necesitamos alguna notación decente (o sea, números y ecuaciones). Por ejemplo, podríamos representar la situación inicial mediante un vector de 3 dimensiones: (13, 15, 17) y vamos a ver si alcanzamos una situación como (45,0,0), ó (0,45,0), ó (0,0,45) mediante la operación de cambiar de color. Para cambiar de color, lo que debemos hacer es restar 1 a dos de las coordenadas y sumar 2 a la tercera. Asi que tenemos una formulación vectorial, que es efectivamente una forma de resolver el problema. Si ponemos ***a=(-1,-1,2); b=(-1,2,-1) y c=(2, -1,-1)****, el hecho de encontrarse dos camaleones se traduce en sumar al vector que da el estado actual uno de los tres vectores* ***a, b ó c.*** *Por lo tanto, cualquier posición que el sistema pueda alcanzar se obtiene poniendo*

$$\boldsymbol{(13,\ 15,\ 17) + \alpha a + \beta b + \gamma c}$$

con $\alpha,\beta,\ \gamma$ enteros. Entonces todo lo que hay que hacer es comprobar que un vector como (45,0,0) NO se puede escribir de esa manera, lo cual puede *hacerse, por ejemplo, con la regla de Cramer o con manipulación diofántica elemental.*

También se puede intentar algo más "sofisticado", considerando los restos de la división por 3 de los números de camaleones de cada color: (13,15,17) equivale a (1,0,2) mod 3, y la operación de cambio de color únicamente conduce a (1,0,2), (0,1,2) ó (1,2,0), pero nunca a (0,0,0) teniendo en cuenta que 45 es múltiplo de 3.

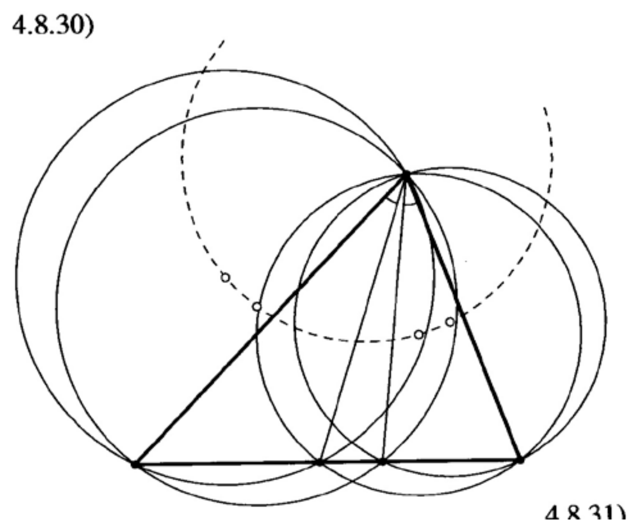
Peter Taylor observa que la única forma en que se puede alcanzar el estado de todos los camaleones del mismo color es si al principio hay el mismo número de camaleones de 2 colores.

Problema 13

Un problema de T. Emelyanova, de la Olimpiada rusa de 2011, Fase de Repúblicas, grado 10, problema 2

En el lado AC del triángulo ABC se toman dos puntos M y K, tales que los ángulos ABM y CBK sean iguales.

Demostrar que los circuncentros de los cuatro triángulos ABM, ABK, CBM y CBK están en una circunferencia.



Solución

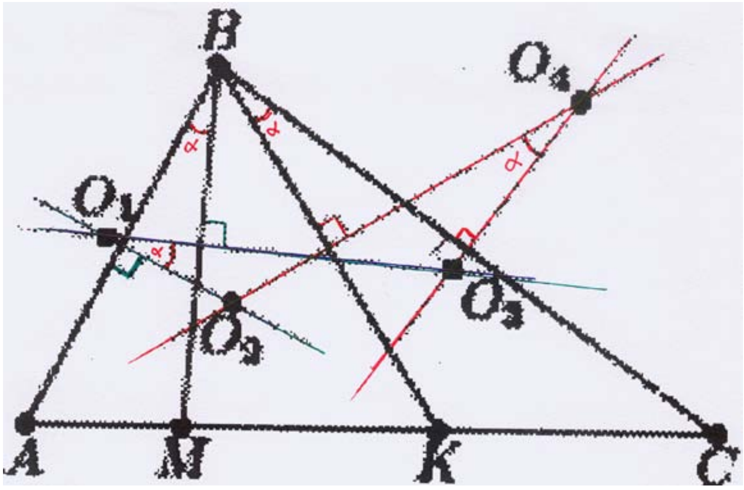
(Traducida de la página web rusa http://mceem.ru)

Para fijar ideas, supondremos que el punto M está entre A y K.

(Nota del traductor: BM y BK son *isogonales* con respecto a los lados BA y BC).

Sean O_1, O_2, O_3, O_4 los circuncentros respectivos de los triángulos ABM, ABK, CBM y CBK.

Aunque la figura siguiente no es de buena calidad, ilustra bien el razonamiento que sigue:



Las rectas O_1O_3 y O_1O_2 son las mediatrices de los segmentos BM y AB, respectivamente. Entonces los ángulos $\measuredangle O_2O_1O_3 = \measuredangle ABM$, porque sus lados están comprendidos entre perpendiculares.

Análogamente se demuestra que $\measuredangle O_2O_4O_3 = \measuredangle CBK$, y ya que BM y BK son isogonales, tenemos

$$\measuredangle O_2O_1O_3 = \measuredangle O_2O_4O_3 ,$$

luego los cuatro circuncentros están en una circunferencia.

Observación

El punto de intersección de O_1O_2 y O_3O_4 es el circuncentro O del triángulo ABC; los puntos O_2 y O_3 pertenecen respectivamente a los segmentos OO_1 y OO_4.

Problema 14

UN PROBLEMA DEL CAMPAMENTO MATEMÁTICO DE ZAKOPANE 1998-99

El Canguro Matemático polaco, que está organizado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad “Nicolás Copérnico” de Torun, celebra durante los veranos un campamento matemático en Zakopane (cerca de la frontera con Eslovaquia, en los montes Tatra) al que invita a estudiantes extranjeros. En 1998 y 1999, los ganadores del Canguro en España fueron invitados a participar en dicho campamento. Las lecciones estuvieron a cargo del Prof. Lev Kurdlyanchuk, de la Universidad de San Petersburgo, y el problema que presento a continuación fue uno de los allí tratados.

Sean a, b, c, d números enteros, y n un número natural. Se verifican las dos condiciones siguientes:

1) n divide al número a + b + c + d
2) n divide al número $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Demostrar que n divide al número $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 4abcd$

Ante un problema como éste, uno se pregunta, ¿por dónde se puede empezar? ¿qué relación hay entre las tres sumas que aparecen en el enunciado? La dos primeras son funciones simétricas de a, b, c y d; y la tercera también lo es. ¿En qué objeto matemático aparecen de una manera natural las funciones simétricas de cuatro números?

En el polinomio cuyas raíces son esos cuatro números

Puede ser una manera de empezar a abordar el problema. Escribamos ese polinomio:

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

y desarrollémoslo para que aparezcan explícitamente las funciones simétricas:

$$P(x)=x^4-(a+b+c+d)x^3+(ab+bc+...)x^2-(abc+acd+...)x+abcd$$

Como es obvio,

0 = P(a) = P(b) = P(c) = P(d),

y estas cuatro igualdades se escriben como

$$0=a^4-(a+b+c+d)a^3+(ab+bc+...)a^2-(abc+acd+...)a+abcd$$

$$0=b^4-(a+b+c+d)b^3+(ab+bc+...)b^2-(abc+acd+...)b+abcd$$

$$0=c^4-(a+b+c+d)c^3+(ab+bc+...)c^2-(abc+acd+...)c+abcd$$

$$0=d^4-(a+b+c+d)d^3+(ab+bc+...)d^2-(abc+acd+...)d+abcd$$

Parece claro lo que ahora hay que hacer para que aparezca el término

$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 4abcd$: sumando miembro a miembro las cuatro igualdades, y dejando en un miembro de la igualdad resultante el término que nos interesa, vemos que en el otro aparece

$$(a+b+c+d)\left(a^3+b^3+c^3+d^3\right)-(ab+bc+...)\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)+(abc+acd+...)(a+b+c+d)$$

que, por las hipótesis del problema, es múltiplo de n, con lo cual hemos terminado la demostración.

Las fuentes bibliográficas de esta colección de problemas se han ido mostrando durante la exposición de cada uno de ellos.

Valladolid, septiembre de 2014