Simposio 29 Olimpíada Iberoamericana de Matemáticas

Breve acercamiento a una metodología para abordar problemas geométricos de tipo olímpico.

Profesor: Enech García Martínez
Universidad de Ciencias Pedagógicas
La Habana, Cuba
e-mail: enechgm@gmail.com
enech@cubaeduca.cu

Resumen:

En este trabajo se realiza un recorrido por diferentes aristas de la resolución de problemas, analizando varias técnicas y estrategias aplicables a todo tipo de problemas, pero centrándonos, sobre todo en una parte de la metodología para abordar problemas geométricos de corte olímpico.

Introducción

Las Olimpiadas de matemáticas, especialmente aquellas dirigidas a los alumnos de la enseñanza media llegan a mas de 100 países en el mundo debido al gran efecto que produce en la popularización de la matemática y como forma de detectar a los jóvenes con talento para el estudio de esta ciencia. Este trabajo está dirigido fundamentalmente a los profesores que deseen entrenar estudiantes para participar en estas competiciones.

Existen métodos heurísticos, estrategias y técnicas que los que se dedican a resolver problemas usan una y otra vez, pero no son recetas, sino orientaciones que pueden ayudar a obtener una solución.

Hoy en día nadie duda de la importancia de la resolución de problemas en la formación de nuestros alumnos, en particular, la función desarrolladora encaminada a fomentar en ellos el pensamiento científico y teórico dotándolos de métodos efectivos de actividad intelectual, por tal motivo es de suma importancia incluir en la formación matemática de un docente la preparación y adiestramiento que lo capacite para enfrentar el trabajo metodológico en el tratamiento de problemas, de manera que logre desarrollar en sus alumnos capacidades y habilidades para formular y solucionar los mismos.

En nuestros países del área algunos estudiantes exolímpicos y egresados de nuestras universidades se han insertado al trabajo de formación de las nuevas generaciones lo cual representa una valiosa contribución al desarrollo de nuestros países en este campo, sin embargo, a pesar de la fuerza en el manejo de las matemáticas carecen de la metodología para saber “cómo enseñar lo que se quiere”. No solo es exponer un tema, explicar algunos ejemplos y proponer problemas de corte olímpico, hay que saber cómo enseñar un modo de actuación consecuente.

Nuestros docentes deben manejar a su antojo los elementos heurísticos que están presentes en la resolución de problemas, entiéndase, los procedimientos y los medios auxiliares heurísticos. Es muy útil conocer los procedimientos heurísticos como apoyo a las actividades mentales, es decir, los principios, reglas y estrategias que nos deben acompañar en el proceso de la resolución.

Todos estamos obligados a tener siempre en cuenta que para convertirnos en solucionadores de problemas la única manera que se aprende a resolverlos es ¡resolviendo problemas!, es por ello que debemos aprovechar lo que de creativo tiene toda persona al nacer, esta habilidad puede desarrollarse cuando practicamos y hacemos un entrenamiento adecuado.

Cuando nos enfrentamos a un problema difícil, según mi colega y amigo venezolano Dr Heber Nieto en muchas ocasiones no llegamos a divisar nada en la primera oportunidad, se recomienda descansar por un período más bien largo y luego recomenzar la tarea, tal vez, por un tiempo continuamos sin encontrar una dirección adecuada, pero de repente, y sin darnos cuenta encontramos el camino correcto.

En este proceso de resolución de problemas no nos podemos olvidar de la metodología propuesta por George Pólya (1887-1985) publicada en su clásico “Cómo resolverlo” cuando nos propone cuatro etapas para resolver problemas, a cada una de ellas le asocia una serie de preguntas y sugerencias, que cuando son aplicadas adecuadamente nos ayudan a resolver el problema.

Etapa 1-Comprensión del problema

1.1 ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?. ¿Cuál es la condición?

1.2 ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?.¿Es insuficiente?.¿Redundante?.¿Contradictoria?.

Etapa 2-Concepción de un plan.

2.1.¿Se ha encontrado un problema semejante?¿Ha visto el mismo problema planteado con algo diferente?

2.2 ¿Conoce un problema relacionado con éste? ¿Conoce alguna herramienta que puede ser útil?. Observe atentamente la incógnita y trate de recordar un problema algo similar.

2.3 Si conoce un problema similar ¿podría utilizarlo?.¿Podría emplear su resultado?¿Podría emplear su método?

2.4 ¿Podría enunciar el problema en otra forma?

2.5 Si no puede resolver el problema trate de resolver algún otro similar. ¿Podría imaginarse un problema algo similar pero más accesible?. ¿Podría imaginarse un problema más general?.¿Puede resolver una parte del problema? Considere una parte del problema y analice en qué forma puede variar la incógnita .¿Puede cambiar la incógnita para acercarse un poco a la solución?

2.6¿Ha empleado todos los datos?.¿Ha considerado todas las nociones esenciales que tienen que ver con el problema?

Etapa 3- Ejecución del plan

3.1Al ejecutar el plan, compruebe cada uno de los pasos.

3.2¿Puede ver claramente que el paso es correcto?.¿Puede demostrarlo?

Etapa 4- Visión retrospectiva

4.1¿Puede verificar el resultado?. ¿Puede verificar el razonamiento?

4.2 ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?. ¿Puede verlo de golpe?.¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Es imposible resolver un problema si no hemos comprendido el enunciado, sin embargo, en nuestras aulas, diariamente vemos a muchos estudiantes que comienzan a realizar operaciones y demás sin reflexionar sobre lo que se le pide.

La segunda etapa tiene que ver con la estrategia, donde se concibe de manera general un plan para atacar el problema, pero aun no se entra en precisiones técnicas. Las preguntas que Pólya indica para esta etapa tratan de traducir el problema a un lenguaje conocido, es decir, se quiere que el ataque al problema se produzca en una zona conocida por el que está enfrentando el problema. Estas sugerencias de Pólya son muy eficaces en la resolución de los problemas que se plantean en nuestras clases según nuestros programas curriculares, pero se quedan un poco por debajo de lo que exige un problema olímpico con ideas no conocidas. Es en esta etapa donde se debe tener en cuenta que no solo bastan los conocimientos, sino también la imaginación y por supuesto la creatividad de cada cual.

La tercera etapa correspondería a la táctica, acá se ponen de manifiesto todos los recursos que tengamos a manos para poder poner en práctica nuestra estrategia, el éxito de esta etapa dependerá en gran medida si fuimos capaces de establecer un eficaz plan, unido a los conocimientos y por supuesto al entrenamiento que tengamos. Es en ella donde se producen los estancamientos, es donde nos damos cuenta si resulta nuestro plan o no, en caso de que algo no esté bien estaríamos obligados a retomar nuestro plan para tratar de enmendarlo, modificarlo tantas veces fuesen necesarias para conseguir nuestro objetivo.

La cuarta etapa, en la inmensa mayoría de los casos, es eliminada del proceso de resolución del problema, sin embargo, Pólya critica mucho esta omisión, no solo por el hecho de que comprobar lo realizado puede conducirnos a percatarnos de errores en el trabajo, sino también que este análisis nos puede llevar a nuevos resultados que pudieran generalizar o hacer más firme el resultado que acabamos de alcanzar.

Desde hace mas de 50 años una gran parte de los matemáticos utilizan la metodología de Polya pues se dan cuentan que en los métodos utilizados por ellos están presentes, de una forma u otra sus estrategias heurísticas. Sin embargo, se debe señalar, que cuando no se tiene experiencia, no resultan tan cómodas aplicarlas, para muchos, estas estrategias son más descriptivas que prescriptivas. Precisamente uno de los investigadores actuales que más se ha ocupado de este problema ha sido Alan Schoenfeld, para este investigador es muy importante la presencia de cuatro factores:

1-Recursos cognitivos

Se refieren a los conocimientos matemáticos generales, como conceptos, resultados y algoritmos.

2-Heurística

Se refiere a las estrategias y técnicas que conocemos y sepamos aplicarlas.

3-Control y metacognición

Es la capacidad de utilizar lo que sabemos para cumplir un determinado objetivo

4-Creencias

Se refiere a lo que se cree y lo que se opina sobre la resolución de problemas.

El primer factor es indiscutible pero no importa la cantidad de conocimientos que se posea para ser un buen solucionador de problemas, es sumamente necesario apoyarnos en algunas técnicas y estrategias que nos ayuden a atacar el problema.

Pero cuando se tratan estos tipos de problemas que están llenos de caminos no conocidos necesitamos mucho más que conocimientos y estrategias, necesitamos algo que nos guíe a utilizar estos recursos, que nos indique en determinados momentos que es lo más aconsejable, o si en un momento determinado debemos abandonar un camino o por el contrario insistir más en ese y no abandonarlo por muy descabellado que parezca, esto es lo que llamamos control. Muchos alumnos y docentes que no tienen mucha experiencia en la resolución de este tipo de problemas quieren avanzar muy rápido en la primera dirección tomada, tienen deseos de llegar a un resultado, pero se apresuran y luego comienzan a dar vueltas y caen varias veces en el mismo error.

El último factor citado por este investigador también es importante, sobre todo entre los estudiantes de la enseñanza media, este tipo de estudiante le da mucha importancia a llegar a un resultado pero no se detiene en el procedimiento, para ellos, todos los problemas tienen una forma predeterminada de hacerlo, estas y otras creencias frenan el desempeño de aquellos que realmente están interesados en resolver un problema, que sienten placer al hacerlo.

Schoenfeld, al igual que Pólya, diseñó una serie de estrategias:

1-Análisis

1.1-Dibuje un diagrama siempre que sea posible.

1.2-Examine casos especiales

1.2.1 Seleccione algunos valores especiales para comenzar a comprender el problema y familiarizarse con él.

1.2.2 Examine casos extremos para acotar las posibilidades.

1.2.3 Si hay un parámetro natural tratar de analizar para los primeros valores consecutivos y observar si se llega a una invariante.

1.3 Trate de simplificar el problema.

1.3.1 Observando si hay simetría

1.3.2 Usando argumentos tales como "sin pérdida de generalidad"

2. Exploración

2.1 Considere problemas equivalentes.

2.1.1 Cambiando condiciones por otras equivalentes.

2.1.2 Relacionando de manera diferente los elementos del problema.

2.1.3 Introduciendo elementos auxiliares

2.1.4 Reformulando el problema

2.1.4.1 Cambiando la perspectiva o notación

2.1.4.2 Mediante argumento por contradicción.

2.1.4.3 Asumiendo que ya está resuelto el problema y determinando sus propiedades.

2.2 Considere un problema ligeramente modificado.

2.2.1 Proponerse resolver una parte del problema tratando de satisfacer parcialmente las condiciones dadas.

2.2.2 Deje al lado una de las condiciones y luego trate de insertarla nuevamente.

2.2.3 Descomponga el dominio del problema y trabaje por caso.

2.3 Considere problemas modificados

2.3.1 Construya problemas análogos pero con menos variables.

2.3.2 Deje todas las variables fijas excepto una para ver su impacto.

2.3.3 Trate de aprovechar cualquier problema relacionado que tenga forma, datos o conclusiones semejantes.

3. Verificación de la solución

3.1 ¿Pasa su solución estas pruebas específicas?

3.1.1 ¿Usa todos los datos pertinentes?

3.1.2 ¿Está de acuerdo con estimaciones o predicciones razonables?

3.1.3 ¿Soporta pruebas de simetría, análisis dimensional y escala?

3.2 ¿Pasa estas pruebas generales?

3.2.1 ¿Puede ser obtenida de manera diferente?

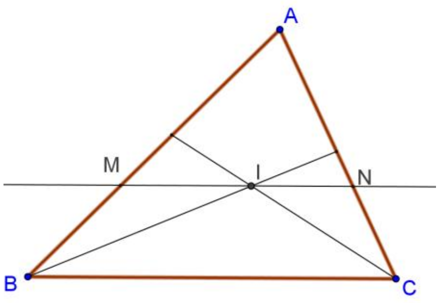
3.2.2 ¿Puede ser sustanciada por casos especiales?

3.2.3 ¿Puede ser reducida a resultados conocidos?

3.2.4 ¿Puede ser utilizada para generar un resultado conocido?.

Veamos un ejemplo:

Los lados del ΔABC miden AB=26 cm, BC=17 cm y CA=19 cm. Las bisectrices de los ángulos de vértices B y C se cortan en el punto I. Por I se traza una paralela a BC que corta a los lados AB y BC en los puntos M y N respectivamente. Calcule el perímetro del ΔAMN.



S/ La primera de las estrategias de Schoenfeld es hacer un diagrama siempre que sea posible, esto es recomendado para todo tipo de problema, pero si el problema es de carácter geométrico sobran las palabras. La inmensa mayoría de los problemas con carácter geométrico que se proponen en la enseñanza media vienen acompañados de una figura, sin embargo, los problemas de corte olímpico nunca la llevan, hacerla, es la primera tarea que tenemos por delante. Es cierto que la figura ilustra pero no demuestra, pero una buena figura ayuda sobremanera a comprender un problema, es un estímulo para nuestra imaginación y en muchos casos nos marca pauta para elaborar un plan de solución.

Hay varias maneras de atacar este problema, aquellos que gustan del algebra y no le tienen miedo a las soluciones con cálculos complicados podrían hallar el área del ΔABC (tienen las longitudes de los tres lados), dividir este resultado entre el semiperímetro obteniendo el radio de la circunferencia inscrita y por proporcionalidad hallar las longitudes de AM, MN y AN.

Ahora bien, si observamos atentamente la figura y tratamos de encontrar alguna relación importante, sobre todo, si hemos hecho una buena figura, nos daremos cuenta que los triángulos BMI y CNI parecen isósceles, si esto fuera cierto casi tendríamos resuelto el problema ya que de:

MI=MB y IN=NC se obtiene:

AM+MN+AN=AM+MI+IN+AN=AM+MB+AN+NC=AB+AC=26 + 19=45

¿podremos probar que los triángulos BMI y CNI son isósceles?

Veamos el ΔBMI:

Sabemos que MN es paralela a BC entonces $\angle MIB=\angle IBC$, pero BI es bisectriz de $\angle ABC$ por tanto $\angle MBI=\angle IBC$ y con esto hemos completado la demostración. Para el Δ CNI se razona de manera análoga.

Análisis retrospectivo:

Si analizamos los datos del problema vemos que hay uno de ellos que no fue utilizado: la longitud del lado BC. Esto quiere decir que para cualquier triángulo con AB=26 cm y CA=19 cm la solución es la misma 26 + 19 = 45.

También es fácil ver que si variamos AB y CA la respuesta siempre será AB + CA. Esto quiere decir que los valores 26 y 19 no tienen nada especial y mucho menos BC = 17. Estos datos, más bien no dejan visualizar claramente la solución y han hecho que nuestra atención se dirija a cosas menos importantes. Estos elementos distractores lo que hacen es aumentar la dificultad del problema.

Supongamos que el enunciado del problema hubiese sido:

En un ΔABC las bisectrices de los ángulos de vértices B y C se cortan en el punto I. Por I se traza una paralela a BC que corta a los lados AB y BC en los puntos M y N respectivamente. Calcule el perímetro del ΔAMN en función de los lados AB y AC.

Este problema enunciado de esta manera es más general, pero probablemente menos complejo que el original, ya que toda nuestra atención se concentrará directamente hacia los lados AB y AC. Esto es una de las recomendaciones de Pólya “considere un problema más general”, claro, un problema general debería ser más difícil, sin embargo, al eliminar aspectos innecesarios podemos visualizar el camino con mayor claridad.

De manera general, no es tan fácil darse cuenta de algún elemento del problema que nos estorba, a veces, detectarlo, es más difícil que el problema mismo. En algunos casos podemos desconfiar de algún dato, por parecer muy particular, pero ¡cuidado!, pues hay propiedades que dependen de elementos muy particulares de los datos, aunque esto más bien en problemas de aritmética.

A continuación veamos algunas técnicas en la resolución de problemas:

Invertir el problema:

Una de las técnicas que utilizamos en los entrenamientos es la de invertir el problema. Cada problema tiene uno contrario, cuando los ponemos frente a frente obviamente genera en el solucionador del problema algo favorable para crear.

Veamos un ejemplo: Se quiere diseñar un uniforme cómodo para los estudiantes de preuniversitario. El problema inverso sería realizar un diseño incómodo. El análisis de esta situación nos va a permitir, en gran medida, descubrir los elementos que producen incomodidad y al eliminarlos entonces se contribuye a la solución del problema original.

En matemática, este tipo de pensamiento está presente en las demostraciones “por reducción al absurdo”, en las cuales partimos precisamente de lo contrario a demostrar para tratar de arribar a una contradicción.

Pensamiento lateral:

Esta es una de las más utilizadas en las olimpíadas internacionales.

Consiste en dejar a un lado las vías que usualmente se utilizan y explorar caminos inusuales aunque parezcan absurdos, tratar de hacer lo que nadie a hecho.

Muchos problemas difíciles se resuelven de manera insospechada por vías que supuestamente no tienen nada que ver con la situación original.

Imitación:

Muchos de nuestros mejores exolímpicos comenzaron imitando a sus primeros profesores, la imitación ayuda, pues imitando muchas veces consolidamos alguna técnica determinada y esto puede permitir ser original en la resolución de un nuevo problema. Si queremos resolver problemas no podemos descuidar la observación e imitación de las técnicas empleadas por estudiantes y colegas.

Detrás de las alturas de un triángulo

El segmento trazado desde un vértice y perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto se le llama altura de un triángulo.

En muchos cursos de geometría generalmente hablamos de la concurrencia de estos tres segmentos o de sus prolongaciones, pero pocas veces nos detenemos a demostrarles a nuestros estudiantes esta afirmación.

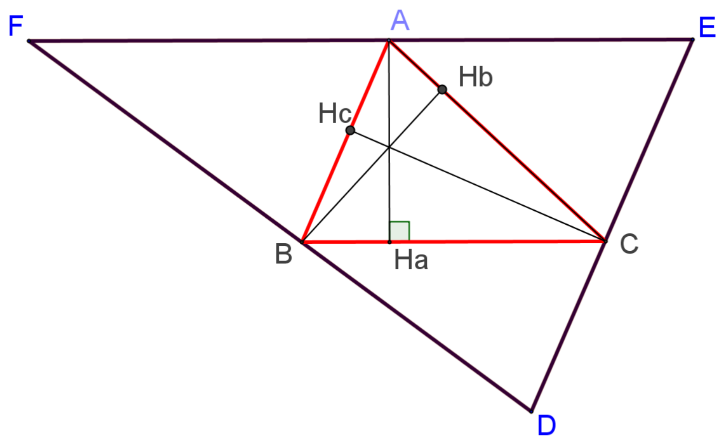
¿Por qué podemos afirmar que las tres alturas son concurrentes?

Veamos una forma de hacerlo una vez que hayamos demostrado a nuestros estudiantes la concurrencia de las mediatrices.

El primer obstáculo que debemos vencer sería:

¿Cómo apoyarnos en lo que sabemos sobre mediatrices para caer en la concurrencia de las alturas?.

Es acá donde intervienen elementos de estrategias y creatividad.



Las alturas ya nos proporcionan la perpendicular, restaría relacionar este segmento con la partición de otro en partes iguales, que por supuesto no serían los lados del ∆ABC. Para mantener la perpendicular podemos construir rectas paralelas a los lados y los puntos por donde pasarían pudieran ser los vértices formándose la nueva figura que a continuación se expone:

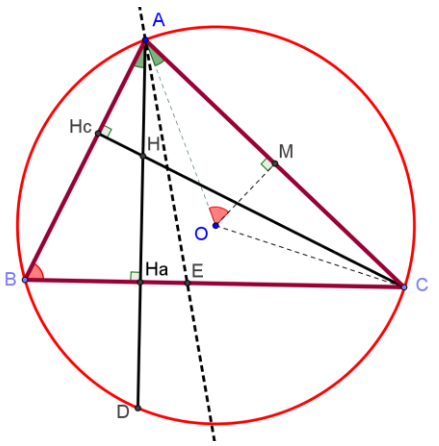
Sean H_a, H_b, y H_c los pies de las alturas desde los vértices A, B y C respectivamente. Tracemos por cada uno de los vértices del ∆ABC una recta paralela al lado opuesto y llamemos D, E y F los puntos de corte de estas rectas. Observemos que el cuadrilátero AFBC es un paralelogramo entonces AF= BC. Análogamente AECB es un paralelogramo y por consiguiente AE=BC. De todo lo anterior podemos concluir que A es el punto medio EF y entonces AH_a será la mediatriz de ese segmento. Por estas razones las tres alturas del ∆ABC se convierten en las tres mediatrices del ∆DEF y por lo tanto son concurrentes.

A continuación veamos varios problemas relacionados con las alturas..

Problema 1:

Demostrar que la reflexión de la altura sobre la bisectriz pasa por el circuncentro

S/ Una de las estrategias que se sigue en muchos problemas de geometría es suponer que el problema está resuelto. Debemos observar que si hay reflexión con respecto a una recta entonces se forman ángulos iguales a ambos lados del eje de simetría, en nuestro caso $\angle H_aAE=\angle EAO$ y como $\angle BAE=\angle EAC$ por ser AE bisectriz esto nos conlleva a pensar que los ángulos BAH_a y OAC deben ser iguales, y este sería nuestro nuevo problema. Si logramos demostrar esta igualdad ya solucionaríamos el problema original.



Sea Ha el pie de la altura trazada desde A, entonces $\angle AH_aB=90°$y$\angle BAH_a=90°-\angle ABH_a$. Sea M el punto medio del lado AC. Sabemos que $\angle AOC=2\angle ABC$ y como el ΔAOC es isósceles, el $\angle AOM=\frac{1}{2}\angle AOC$, es decir: $\angle MAO=90°-\angle ABH_a$. Como $\angle BAHa=\angle MAO=90°-\angle ABH_a$, los ángulos que forman AH_a y AO con la bisectriz del $\angle BAC$ son iguales.

Problema 2:

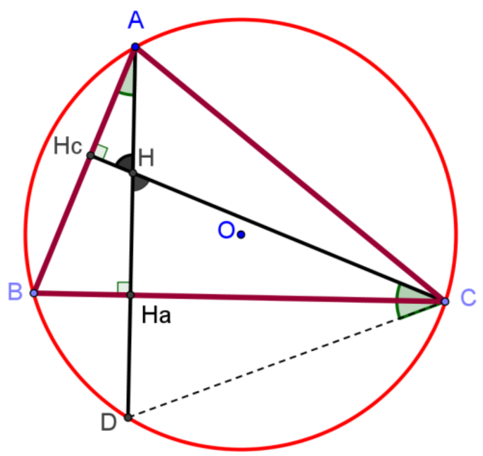
Demostrar que la reflexión del ortocentro sobre cada uno de los lados del triángulo cae sobre el circuncírculo.

S/ Este es otro problema donde pudiéramos razonar de esa misma manera.

Veamos:

Si la reflexión de H con respecto a BC cae sobre la circunferencia entonces $HH_a=H_aD$, por lo tanto H_a sería punto medio de HD.

Observemos que al relacionar esta igualdad con la perpendicularidad nos remite a pensar en el concepto de mediatriz, por lo que CH_a será mediatriz



de HD. Pero fijémonos en que si trazara la cuerda DC entonces en el ΔHCD coincidiría la mediatriz, la mediana y la altura y por ende la bisectriz. Todo lo anterior sugiere demostrar que $\angle HCH_a = \angle H_aCD$.

Sea D el punto de corte de la prolongación de la altura AH_a con el circuncírculo.

Bastaría demostrar que $HH_a = H_aD$

Tenemos que:

$\angle BAH_a = 90° - \angle ABH_a$

$\angle BCH_c = 90° - \angle ABH_a$

Por consiguiente $\angle BAH_a = \angle BCH_c$

Pero $\angle BAD = \angle BCD$ …...(por estar inscritos en el arco BD)

Entonces $\angle BCH = \angle BCD$ y los triángulos

DCH_a y HCH_a son iguales, por lo que concluimos que $HH_a = H_aD$

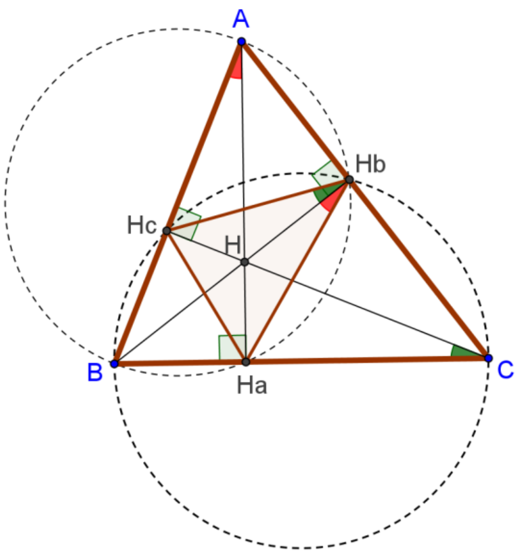
Observación:

El triángulo formado por los pies de las alturas en un triángulo se le denomina ***triángulo órtico*** del triángulo dado.

Problema 3:

Demostrar que el ortocentro de un triángulo es el incentro de su triángulo órtico.

S/ El primer acercamiento para la concepción de un plan sería en comprender que las alturas del triángulo tienen que ser la bisectrices de su órtico, por lo que el trabajo con ángulos debe ocupar un lugar central en nuestro resolución. La existencia de ángulos rectos y tratar de encontrar relaciones con ángulos nos conduce a ampliar los recursos para ello, por eso encontramos algunas circunferencias en nuestra figura original lo cual nos permitiría encontrar nuevas relaciones entre ángulos.



Sea el ΔABC y su triángulo órtico $\Delta H_aH_bH_c$

Como $\angle BH_cC = \angle BH_bC = 90°$, los puntos B, H_c, H_b y C están sobre la misma circunferencia y por tanto $\angle BH_bH_c = \angle BCH_c$.

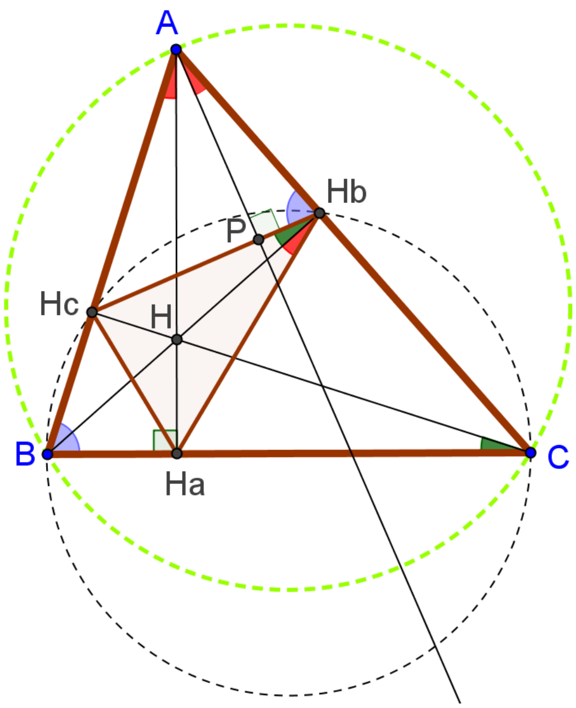
De la misma forma, los puntos B,H_a, H_b y A también están sobre la misma circunferencia, entonces $\angle BH_bH_a = \angle BAH_a$.

Pero $\angle BCH_c = \angle BAH_a = 90° - \angle ABC$

Por todo lo anterior obtenemos que $\angle BH_bH_c = \angle BH_bH_a$, es decir , la altura BH_b es la bisectriz de $\angle H_cH_bH_a$, concluyendo que las alturas del ΔABC son las bisectrices del $\Delta H_aH_bH_c$ y el ortocentro del ΔABC es el incentro del $\Delta H_aH_bH_c$.

Problema 4:

Demostrar que un triángulo, la perpendicular trazada desde un vértice al lado correspondiente del triángulo órtico pasa por el circuncentro.



S/ En la resolución de este problema se siguen ideas similares a las del problema 1. Haber comprendido la estrategia seguida en ese problema y algunos elementos de el que nos antecedió nos conduciría en gran medida a encontrar exitosamente la solución de este problema.

Sea P el pie de la perpendicular desde A al lado H_bH_c del triángulo órtico. Como los puntos B,H_c,H_b y C están sobre la misma circunferencia entonces $\angle H_cH_bC + \angle H_cBC = 180°$ de donde $\angle H_cBC = \angle ABC = \angle AH_bH_c$ ya que también $\angle H_cH_bC + \angle AH_bH_c = 180°$ por consiguiente:

$\Delta AH_bH_c \sim \Delta ABC$ y $\angle H_bAP = 90° - \angle AH_bP = 90° - \angle ABC$

Pero $\angle BAH_a = 90° - \angle ABC$, es decir, las rectas AH_a y AP forman ángulos iguales con AB y AC respectivamente, o lo que es lo mismo, AP es la reflexión de AH_a sobre la bisectriz del $\angle BAC$.

De lo anterior podemos concluir que AP pasa por el circuncentro O del ΔABC.

Conclusiones:

En la resolución de problemas de corte olímpico no hay recetas infalibles. Como se ha mostrado, existen técnicas y estrategias que complementan la metodología para abordar los mismos y constituyen el soporte universal para el acercamiento a su solución.

Sin embargo, en la resolución de estos problemas intervienen otros procesos no menos importantes como la imaginación y la creatividad dependientes del desarrollo del pensamiento lógico y del razonamiento de cada solucionista.

Las técnicas y estrategias aplicadas en los ejemplos tratados dan prueba de ello. En los ejemplos presentados se aplicaron diversas estrategias. Una de ellas consistió en transformar el problema en otro de carácter mucho más general que nos permitió una vía mucho más factible. Otro muestra que no solo las estrategias y técnicas que se tienen resuelven el problema, es necesario una dosis de creatividad e imaginación. En otros, el plan de solución se basó en suponer que el problema estaba resuelto y mediante un trabajo hacia atrás lograr la demostración del mismo.

Bibliografía:

[1] Andreescu, T., Feng, Z., *Mathematical Olympiads Problems and Solutions from Around the World 1998-1999.*

[2] Duran, D., *La Geometría Euclideana*, Astrodata, Maracaibo, 2003.

[3] Nieto, J. H *Olimpiadas Matemáticas: El arte de resolver problemas.* Colección Minerva, Caracas, 2005.

[4] Poicaré, H., *Ciencia y Método* , Espasa-Calpe Argentina, Buenos Aires, 1946.

[5] Pólya, G., *How to Solve it*; A New Aspect of Mathematical Method, Princeton University Press, Princenton, 1945.

[6] Schoenfeld, A. H, Problem Solving Strategies in college-Level Mathematics, Physics Department, University of California (Berkeley) 1978