29ª Olimpiada Iberoamericana Matemática

Honduras, 2014

DÍA 2

San Pedro Sula, 24 de septiembre de 2014

Problema 4.

Se tienen N monedas, de las cuales $N-1$ son auténticas de igual peso y una es falsa, de peso diferente de las demás. El objetivo es, utilizando exclusivamente una balanza de dos platos, hallar la moneda falsa y determinar si es más pesada o más liviana que las auténticas. Cada vez que se pueda deducir que una o varias monedas son auténticas, entonces todas estas monedas se separan inmediatamente y no se pueden usar en las siguientes pesadas. Determine todos los N para los que se puede lograr con certeza el objetivo. (Se pueden hacer tantas pesadas como se desee.)

Problema 5.

Sea ABC un triángulo acutángulo y H el punto de intersección de sus alturas. La altura desde A corta a BC en D. Sean M y N los puntos medios de BH y CH, respectivamente. DM y DN intersectan a AB y AC en X e Y, respectivamente. Si XY intersecta a BH en P y a CH en Q, demuestre que $H,\ P,\ D$ y Q están en una misma circunferencia.

Problema 6.

Dado un conjunto X y una función $f : X \to X$, denotamos, para cada $x \in X$, $f^1(x) = f(x)$ y, para cada $j \geq 1$, $f^{j+1}(x) = f(f^j(x))$. Decimos que $a \in X$ es un punto fijo de f si $f(a) = a$.
Para cada número real x, definimos $\pi(x)$ como la cantidad de primos positivos menores o iguales que x.
Dado un número entero positivo n, decimos que $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ es *catracha* si $f^{f(k)}(k) = k$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Pruebe que:

a) Si f es catracha, entonces f tiene al menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

b) Si $n \geq 36$, existe una función catracha con exactamente $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

Duración de la prueba: 4 horas y media.
Valor de cada problema: 7 puntos.

29ª Olimpiada Iberoamericana Matemática
Honduras, 2014

DIA 2

San Pedro Sula, 24 de setembro de 2014

Problema 4.

Tem-se N moedas, das quais $N-1$ são autênticas de igual peso e uma é falsa, de peso diferente das demais. O objetivo é, utilizando exclusivamente uma balança de dois pratos, achar a moeda falsa e determinar se é mais pesada ou mais leve que as autênticas. Em cada vez que se possa deduzir que uma ou várias moedas são autênticas, todas estas moedas são imediatamente separadas e não podem ser usadas nas pesagens seguintes. Determine todos os N para os quais se pode garantir que o objetivo seja atingido. (Podem-se fazer tantas pesagens quantas se deseje).

Problema 5.

Seja ABC um triângulo acutângulo e H o ponto de interseção de suas alturas. A altura relativa ao vértice A corta BC em D. Sejam M e N os pontos médios de BH e CH, respectivamente. DM e DN intersectam AB e AC em X e Y, respectivamente. Se XY intersecta BH em P e CH em Q, demonstre que $H,\ P,\ D$ e Q estão numa mesma circunferência.

Problema 6.

Dado um conjunto X e uma função $f : X \to X$, denotamos, para cada $x \in X$, $f^1(x) = f(x)$ e, para cada $j \geq 1$, $f^{j+1}(x) = f(f^j(x))$. Dizemos que $a \in X$ é um ponto fixo de f se $f(a) = a$. Para cada número real x, definimos $\pi(x)$ como o número de primos positivos menores ou iguais a x.
Dado um número inteiro positivo n, dizemos que $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ é *catracha* se $f^{f(k)}(k) = k$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Prove que:

a) Se f é catracha, então f tem pelo menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ pontos fixos.

b) Se $n \geq 36$, então existe uma função catracha com exatamente $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ pontos fixos.

Duração da prova: 4 horas e meia.
Valor de cada problema: 7 pontos.

29ª Olimpiada Iberoamericana Matemática
Honduras, 2014

DAY 2

San Pedro Sula, September 24, 2014

Problem 4.

Among N coins, $N-1$ are authentic with the same weight and one is fake, with different weight than the others. The objective is, using exclusively a two plate scale, to find the fake coin and to determine if it is heavier or lighter than the authentic ones. Each time it can be deduced that one or more coins are authentic, then all of these coins are separated immediately and may not be used in following weigh ins. Determine all N for which the objective may be achieved with certainty. (As many weigh ins as wished may be done.)

Problem 5.

Let ABC be an acute triangle with H the point of intersection of its heights. The height from A cuts BC in D. Let M and N be the midpoints of BH and CH, respectively. DM and DN intersects AB and AC in X and Y, respectively. If XY intersects BH in P and CH in Q, show that H, P, D, and Q lie in the same circle.

Problem 6.

Given a set X and a function $f : X \to X$, for each $x \in X$, denote $f^1(x) = f(x)$ and for each $j \geq 1$, $f^{j+1}(x) = f(f^j(x))$. We say that $a \in X$ is a fixed point of f if $f(a) = a$.
For each real number x, define $\pi(x)$ to be the number of positive primes less than or equal to x.
Given a positive integer n, $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ is *catracha* if $f^{f(k)}(k) = k$ for all $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Show that:

a) If f is catracha, then f has at least $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ fixed points.

b) If $n \geq 36$, there exists a catracha function with exactly $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ fixed points.

Duration of the test: 4 and a half hours.
Value for each problem: 7 points.