Título: La desigualdad entre la media aritmética y geométrica en problemas de olimpiadas.

Por Eduardo Miguel Pérez Almarales

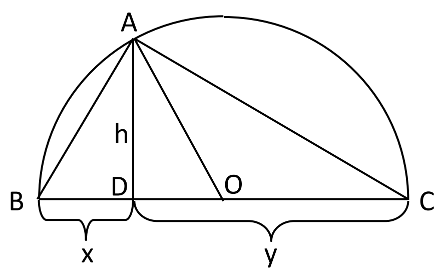
Resumen:

En el presente artículo se pretende mostrar la utilidad de una desigualdad tan elemental como la relación entre las medias aritmética y geométrica para resolver problemas de olimpiadas, se ofrece una demostración algebraica y una geométrica para esta relación en dos elementos, a continuación se ofrece la demostración realizada por Cauchy al caso general y se proponen problemas con soluciones de olimpiadas realizadas en diferentes países.

Desarrollo:

Se conoce que la media aritmética entre dos valores no negativos a y b se calcula como $\frac{a+b}{2}$ y la media geométrica como $\sqrt{ab}$ entonces demostraremos que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Usaremos una vía algebraica y una geométrica que nos permitirá analizar algunas de las interconexiones conceptuales que se establecen entre estas dos disciplinas de la Matemática.

Vía algebraica: Conocemos que $x^2 \geq 0$, si en la desigualdad que queremos demostrar multiplicamos por 2 y transponemos todo al miembro izquierdo, obtenemos $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$, factorizando tenemos $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, que se cumple.



Vía Geométrica:

Utilizando el teorema de las alturas se tiene que $h = \sqrt{xy}$ es decir la media geométrica entre x, y. Por otra parte podemos percatarnos que $OA = \frac{x+y}{2}$, es decir la media geométrica, que en este caso es la hipotenusa del triángulo rectángulo AOD y la media geométrica es uno de sus catetos, entonces se tiene que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Esta desigualdad se cumple además si la cantidad de valores aumenta. Según Bulajich, Gómez y Valdés (2008), Cauchy probó esta desigualdad utilizando una inducción de la siguiente forma:

1. Probar que se cumple para dos números.
2. Probar que si se cumple para n elementos entonces se cumple para n – 1 elementos.
3. Probar que si se cumple para n elementos entonces se cumple para 2n elementos.

En el caso que nos ocupa el primer paso está probado. Probaremos el segundo y el tercer pasos:

2) Tomamos n – 1 números no negativos $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ y sea $g = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}$, como tenemos como premisa que se cumple para n elementos entonces:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + g}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} g} = \sqrt[n]{g^{n-1} g} = g$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + g \geq ng$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}$$

Entonces se cumple para n – 1 elementos.

3) sean 2n números reales no negativos $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n})$$

$$\geq 2\left(\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4} + \cdots + \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}\right)$$

$$\geq 2n \sqrt[n]{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4} \cdot \cdots \cdot \sqrt{a_{2n-1} a_{2n}}}$$

$$\geq 2n \sqrt[2n]{a_1 a_2 \cdots a_{2n}}$$

A continuación analizaremos algunos ejercicios de olimpiadas donde se puede utilizar esta desigualdad.

1. (Brasil, 2001) Prueba que $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$, $\forall a, b, c \in \mathcal{R}_+^*$

<u>Solución</u>:

Vamos a transformar $(a+b)(a+c) = a^2 + ab + ac + bc = a(a+b+c) + bc$

Aplicando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica se tiene:

$$a(a+b+c) + bc \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$$

2. (Balcanes, 2002) Sean a, b, c reales positivos, prueba que:

$$\frac{2}{b(a+b)}+\frac{2}{c(b+c)}+\frac{2}{a(c+a)}\geq\frac{27}{(a+b+c)^2}$$

<u>Solución</u>: aplicando la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica

$$\frac{2}{b(a+b)}+\frac{2}{c(b+c)}+\frac{2}{a(c+a)}\geq\frac{2\cdot 3}{\sqrt[3]{abc}\cdot\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Apliquemos dos veces más la desigualdad media aritmética – media geométrica

$\sqrt[3]{abc}\leq\frac{a+b+c}{3}$; $\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}\leq\frac{2(a+b+c)}{3}$; entonces

$$\frac{2\cdot 3}{\sqrt[3]{abc}\cdot\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}\geq\frac{27}{(a+b+c)^2}$$

3. (Canadá, 2002) Prueba que $\forall a,b,c\in\mathcal{R}_+^*$, se cumple que $\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}\geq a+b+c$. ¿Cuándo ocurre la igualdad?

<u>Solución</u>: teniendo en cuenta que $abc>0$ podemos multiplicar la desigualdad por abc con lo cual transformamos lo que queremos demostrar en: $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$

Transformando el miembro izquierdo, $a^4+b^4+c^4=\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2}$

Si aplicamos media aritmética – media geométrica a cada sumando tenemos:

$$\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2}\geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$
$$=\frac{a^2(b^2+c^2)}{2}+\frac{b^2(c^2+a^2)}{2}+\frac{c^2(a^2+b^2)}{2}$$

Aplicando nuevamente la desigualdad media aritmética – media geométrica tenemos que:

$$\frac{a^2(b^2+c^2)}{2}+\frac{b^2(c^2+a^2)}{2}+\frac{c^2(a^2+b^2)}{2}\geq a^2bc+b^2ca+c^2ab=abc(a+b+c)$$

La igualdad si y solo si a = b = c.

4. (Rusia, 2002) Prueba que $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\geq xy+yz+zx$, para $x,y,z\in\mathcal{R}_+^*: x+y+z=3$

<u>Solución</u>:

Esta desigualdad puede ser transformada de la siguiente forma:

$$2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)\geq 2(xy+yz+zx)$$

$$x^2+y^2+z^2+2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right) \geq x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$
$$=(x+y+z)^2=3(x+y+z)$$

Entonces la demostración de la desigualdad original se reduce a demostrar que

$x^2+y^2+z^2+2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right) \geq 3(x+y+z)$

Vamos a utilizar 3 veces la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica:

$x^2+\sqrt{x}+\sqrt{x} \geq 3\sqrt[3]{x^3}=3x$, de la misma forma $y^2+\sqrt{y}+\sqrt{y} \geq 3\sqrt[3]{y^3}=3y$; $z^2+\sqrt{z}+\sqrt{z} \geq 3\sqrt[3]{z^3}=3z$, sumando estas desigualdades se tiene la deseada.

5. (Grecia, 2010) Si $a,b \in \mathcal{R}_+^*: a+b=3$ y $x,y,z \in \mathcal{R}_+^*: xyz=1$, prueba que $(ax+b)(ay+b)(az+b) \geq 27$. ¿Cuándo ocurre la igualdad?

Solución:

La desigualdad se puede transformar en

$$a^3xyz+a^2b(xy+yz+zx)+ab^2(x+y+z)+b^3 \geq 27$$

Por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica

$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$; $xy+yz+zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}=3$, entonces:

$a^3xyz+a^2b(xy+yz+zx)+ab^2(x+y+z)+b^3 \geq a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, y por tanto es suficiente demostrar que $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \geq 27 \Leftrightarrow (a+b)^3 \geq 27$, que se cumple por ser $a+b=3$. La igualdad se verifica si y solo si x = y = z = 1.

6. (Grecia, 2010) Resolver en reales positivos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z+w=4 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=5-\frac{1}{xyzw} \end{cases}$$

Solución:

Por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica se tiene que:

$$1=\frac{x+y+z+w}{4} \geq \sqrt[4]{xyzw} \Longrightarrow xyzw \leq 1 \qquad (1)$$

La segunda ecuación se transforma en $xyz+yzw+zwx+wxy+1=5xyzw$

Usando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica se tiene:

$5xyzw= xyz+yzw+zwx+wxy+1 \geq 5\sqrt[5]{(xyzw)^3} \Longrightarrow (xyzw)^5 \geq (xyzw)^3$,

entonces $xyzw \geq 1$ $\qquad (2)$

Con la igualdad para $xyz=yzw=zwx=wxy=1$

Por (1) y (2), $xyzw=1$, que es posible cuando $x=y=z=w=1$

Por tanto la única solución $(x,y,z,w)=(1,1,1,1)$

7. (Inglaterra, 1996) Encuentra todos los números reales positivos a, b, c, d que satisface que:

$$\begin{cases} a+b+c+d=12 \\ abcd=27+ab+ac+ad+bc+bd+cd \end{cases}$$

Solución:

Usando la desigualdad MA-MG en la segunda ecuación obtenemos:

$abcd \geq 27+6\sqrt{abcd}$

Si transponemos los elementos del miembro derecho para el izquierdo, obtenemos un polinomio cuadrático en $\sqrt{abcd}$ y factorizando tenemos:

$(\sqrt{abcd}+3)(\sqrt{abcd}-9) \geq 0$

Esto implica que $\sqrt{abcd} \geq 9$, lo cual combinado con la primera ecuación del sistema da:

$\sqrt[4]{abcd} \geq \frac{a+b+c+d}{4}$

La desigualdad MA-MG implica que $a=b=c=d=3$ es la única solución.

8. (China, 2006) Sea $n \in \mathbb{Z}_+^*: n \geq 2$ y $a_1, a_2, \cdots, a_n \in (0,1)$. Determina el máximo valor de la suma $\sum_{i=1}^{n} \sqrt[6]{a_i(1-a_{i+1})}$, donde $a_{n+1=}\ a_1$

<u>Solución</u>: Por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica:

$\sqrt[6]{a_i(1-a_{i+1})} = 2^{\frac{4}{6}} \sqrt[6]{a_i(1-a_{i+1})\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{6}(a_i-a_{i+1}+3)$, luego

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[6]{a_i(1-a_{i+1})} \leq \sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{6}(a_i-a_{i+1}+3) = 2^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{6}\cdot 3n = \frac{n}{\sqrt[3]{2}}$$

La igualdad se logra si y solo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{2}$, luego el máximo es $\frac{n}{\sqrt[3]{2}}$.

9. (Repúblicas Checa y Eslovaca, 2012) Entre todos los números reales a, b, c, d que satisfacen que $ab+cd=ac+bd=4$ y $ad+bc=5$. Encuentra aquellos para los cuales $a+b+c+d$ es lo menor posible.

Solución:

Tenemos que:

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$
$$= a^2+b^2+c^2+d^2+2(4+4+5) = a^2+b^2+c^2+d^2+26 \quad (1)$$

Ahora por la desigualdad MA-MG $a^2+d^2 \geq 2ad$, $b^2+c^2 \geq 2bc$ donde la igualdad se verifica si y solo si $a=d$ y $b=c$ y de (1) tenemos:

$(a+b+c+d)^2 \geq 2ad+2bc+26 = 2\cdot 5+26 = 36$, entonces entre todos los números reales que satisfacen las condiciones siempre tenemos:

$a+b+c+d \geq 6$, donde la igualdad se verifica si y solo si $a=d$ y $b=c$, o $2ab=4$, $a^2+b^2=5$, entonces $\{a,b\}=\{1,2\}$. Entonces los números buscados a,b,c,d son las cuádruplas $(1,2,2,1),(2,1,1,2)$.

10. (Rumanía, 2002) Sea $a \in \mathcal{R}$, $a>1$, y $f,g,h:\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$, funciones reales tal que $f(x)+g(x)+h(x) \geq 0, \forall x \in \mathcal{R}$. Demuestra que la ecuación $a^{f(x)}+a^{g(x)}+a^{h(x)}=3$ tiene soluciones si y solo si las funciones $f(x),g(x),h(x)$ tienen ceros comunes.

a) Resuelve la ecuación $5^{1+cos\pi x}+2^{x^2-1}+2^{2(1-|x|)}=3$

<u>Solución</u>:

Por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica tenemos:

$$1=\frac{1}{3}\left(a^{f(x)}+a^{g(x)}+a^{h(x)}\right) \geq \sqrt[3]{a^{f(x)}\cdot a^{g(x)}\cdot a^{h(x)}} = \sqrt[3]{a^{f(x)+g(x)+h(x)}} \geq \sqrt[3]{a^0} = 1$$

Entonces se cumple la igualdad en esta desigualdad: $a^{f(x)}=a^{g(x)}=a^{h(x)} \Longrightarrow f(x)=g(x)=h(x)$ y como $f(x)+g(x)+h(x)=0$, porque tiene que cumplirse la igualdad $f(x)=g(x)=h(x)=0$, entonces los valores de x tienen que ser ceros comunes.

a) La ecuación puede escribirse en la forma:

$2^{(1+cos\pi x)\log_2 5}+2^{x^2-1}+2^{2(1-|x|)}=3$, por tanto considerando $f(x)=(1+cos\pi x)\log_2 5$, $g(x)=x^2-1$, $h(x)=2(1-|x|)$, tenemos $f(x)+g(x)+h(x)=(1+cos\pi x)\log_2 5+(|x|-1)^2 \geq 0$, el resultado anterior implica que la solución está formada por las raíces comunes a las tres funciones f,g,h, que son $x=1, x=-1$.

Bibliografía:

1. Al-Thukair, F. (2012). Saudi Arabia Mathematical Competitions 2012.
2. Andreescu, T. and Dospinescu, G. (s.f). Good for IMO. En formato digital.
3. Andreescu, T., Feng, Z. and Lee, G. (Eds.) (2001). Mathematical Olympiads 2000–2001. Problems and Solutions From Around the World. USA: The Mathematical Association of America.
4. Andreescu, T. and Gelca, R. (2009). Mathematical Olympiad Challenges. Boston: Birkhäuser.
5. Ba Can, V. and Pohoata, C. (2008). Old and New Inequalities. En formato digital.
6. Bin, X. and Yee, L. (Eds.) (2007). Mathematical Olympiad in China. Problems and Solutions. China: East China Normal University Press and World Scientific Publishing.
7. Boju, V. and Funar, L. (2007). The Math Problems Notebook. Boston: Birkhäuser.
8. Bulajich, R., Gómez, J. and Valdez, R. (2009). Inequalities. A Mathematical Olympiad Approach. Germany: Birkhäuser.
9. Chau, L. and Khoi, L. (2010). Selected Problems of the Vietnamese Mathematical Olympiad (1962-2009). Singapore: World Scientific Publishing.
10. Dashdorj, T. et al. (2010). 46th Mongolian Mathematical Olympiad. Ulaanbaatar: National University of Mongolia.
11. De Souza, P. and Silva, J. (1998). Berkeley Problems in Mathematics. En formato digital.
12. Djukić, D., Janković, V., Matić, I. and Petrović, N. (2011). The IMO Compendium. New York: Springer.
13. Dorrie, H. (1965). 100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their History and Solution. New York: Dover Publications.
14. Feng, Z. and Sun, Y. (Eds.)(2013). USA and International Mathematical Olympiads, 2012-2013.
15. Haggstrom, P. (2013). A one line proof of the Cauchy-Schwarz inequality. En www.gotohaggstrom.com.
16. Horák, K. (Ed.) (2012).61st Czech and Slovak Mathematical Olympiad.
17. Joyce, D. (2012). Cauchy's Inequality. En formato digital.

18. Kedlaya, K. (1999). A < B (A is less than B). En formato digital.
19. Lee, H. (2011). Inequalities From Around the World 1995-2005. En formato digital.
20. Lee, H., Lovering, T., and Pohoata, C. (2008). Infinity. En formato digital.
21. Lee, H. (2005). Topics in Inequalities. En formato digital.
22. Lee, H. (2005). Inequalities Through Problems. En formato digital.
23. Lee, H. (2005). Topics in Inequalities - Theorems and Techniques. En formato digital.
24. Mildorf, T. (2005). Olympiad Inequalities. En formato digital.
25. Muniz Neto, A. (1999). Desigualdades Elementares. En revista Eureka. Número 5.
26. Poonen, B. (s.f.). Inequalities. En formato digital.
27. Steele, M. (2004). The Cauchy–Schwarz Master Class. An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities. New York: Cambridge University Press.
28. Ta-Tsien, L. (Ed.). (1998). Problems and Solutions in Mathemtics. USA: World Scientific Publishing.